

Министерство просвещения РФ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Уральский государственный педагогический университет»  
Институт математики, физики, информатики и технологий  
Кафедра высшей математики и методики обучения математике

ОРГАНИЗАЦИЯ ПРОЕКТНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ 10-11  
КЛАССОВ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

**Выпускная квалификационная работа**

Направление «44.03.01 – Педагогическое образование.  
Профиль «Математика»

Допущена к защите:  
Заведующий кафедрой

\_\_\_\_\_  
дата                      подпись

\_\_\_\_\_  
оценка

Исполнитель:  
Шихирина Ольга Михайловна,  
обучающаяся группы МАТ-1601

\_\_\_\_\_  
подпись

Научный руководитель:  
Блинова Татьяна Леонидовна,  
канд. пед. наук, доцент

\_\_\_\_\_  
подпись

Екатеринбург 2020

## ВВЕДЕНИЕ

Федеральный государственный стандарт среднего общего образования (ФГОС СОО) ориентирован на становление личностных характеристик выпускника («портрет выпускника школы»), а именно:

- владеющий основами научных методов познания окружающего мира;
- мотивированный на творчество и инновационную деятельность;
- готовый к сотрудничеству, способный осуществлять учебно-исследовательскую, *проектную* и информационно-познавательную деятельность.

Также, согласно ФГОС СОО результатом освоения основной образовательной программы, в частности, должно быть:

- владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и *проектной деятельности*, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания.

Следует отметить, что ФГОС СОО устанавливает требования к образовательному процессу не только с точки зрения обучающихся, но и с точки зрения учителя, реализующего основную образовательную программу. Так, у него должны быть сформированы основные компетенции, необходимые для обеспечения реализации требований Стандарта и успешного достижения обучающимися планируемых результатов освоения основной образовательной программы, в том числе умения:

- организовывать и сопровождать учебно-исследовательскую и проектную деятельность обучающихся, выполнение ими индивидуального проекта.

Из сказанного, становится очевидным то, что организация проектной деятельности является неотъемлемой частью образовательного процесса, в том числе и в 10-11 классах.

Значительный вклад в изучение данной проблемы внесли такие авторы, как: Дьюи Дж., Мяташ Н.В., Полат Е.С., Пахомова Н.Ю., Поташник М.М., Рубцов В.В., Селевко Г.К., Симоненко В.Д., Чечель И.Д. и др., которые в своих работах дали определения таким понятиям как «проект», «проектная деятельность», «метод проектов», рассмотрели их классификации и этапы организации.

Важно заметить, что в настоящее время ориентиром для модернизации процесса обучения является Паспорт национальной программы «Цифровая экономика Российской Федерации» (декабрь, 2018), который определяет три образовательные области, развитие которых критически важно для подготовки кадров цифровой экономики России. Эти образовательные области таковы: «Математика», «Информатика» и «Технологии цифровой экономики». Программа нацелена на создание устойчивой кадровой базы, успешно владеющей современными цифровыми технологиями и умеющей подстраиваться под постоянно изменяющуюся информационную среду. Постоянные изменения среды, которые мы сегодня не можем даже спрогнозировать, потребуют серьезного развития поисково-исследовательских компетенций личности.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что проблема организации проектной деятельности, в частности обучающихся 10-11 классов, не нова и достаточно глубоко исследована, но в условиях новых федеральных государственных образовательных стандартов требует теоретической корректировки и адаптации к деятельности современного учителя.

**Объект исследования:** процесс обучения математике в общеобразовательной школе.

**Предмет исследования:** особенности организации проектной деятельности обучающихся 10-11 классов.

**Цель работы:** разработать учебный проект по математике.

В соответствии с поставленной целью определены **задачи:**

- 1) проанализировать учебно-методическую литературу и интернет ресурсы с целью описания различных подходов к определению понятия «проектная деятельность»;
- 2) охарактеризовать компоненты проектной деятельности;
- 3) выделить виды проектной деятельности и этапы её организации в процессе обучения математике;
- 4) выделить особенности познавательной сферы обучающихся 10-11 классов;
- 5) дополнить этапы организации проектной деятельности электронными образовательными ресурсами и описать особенности организации деятельности обучающихся на каждом из этапов;
- 6) разработать учебный проект по математике.

Структура работы: введение; основная часть, состоящая из двух глав; заключение; список использованной литературы и интернет-ресурсов.

# ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОРГАНИЗАЦИИ ПРОЕКТНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ

## 1. 1. Различные подходы к определению проектной деятельности и характеристика её компонентов

Сущность изучаемого понятия имеет тесную связь с такими терминами как «проект», «проектирование», «деятельность», которые определяют, как с точки зрения различных отраслей науки, так и с точки зрения образовательного процесса.

Традиционное понимание термина «проект» существует в тесной связке со строительством, техникой и т.д. – это совокупность различных планов, чертежей, расчетов для создания какого-либо здания, изделия или сооружения. В словаре В.И. Даля *проект* определяется как план, предположение, и самое изложение его на письме или в чертеже.

В современном мире термин «*проект*» приобретает определенные черты, отличающие его от других понятий. Теперь это ограниченный во времени целенаправленный процесс деятельности человека, группы людей, какой-либо организации и т.д., с определенными требованиями к качеству его выполнения. Таким образом получаем, что такое уточнение указывает не только на целостную структуру проекта, но и подчеркивает его новизну.

Согласно К.М. Кантору *проект* – это проявление творческой активности человеческого сознания. Автор придает огромное значение проекту как особой форме сознания, которая влияет на деятельность человека.

Если рассматривать термин «проект» с точки зрения образования, то получаем, что это продуктивная деятельность, осуществляемая в специально организованных учителем условиях, которые дают обучающемуся возможность самостоятельно выполнять необходимые виды деятельности, достигать результатов, но в условиях полной безопасности.

Процесс работы над проектом называется *проектированием*. В своих трудах Дж.К. Джонс даёт большое количество различных определений процесса проектирования, наиболее значимым из которых является «*проектирование – вид деятельности, дающий начало изменениям в*

*искусственной среде*». Заметим, что в более широком смысле под проектированием понимают тот вид деятельности, который направлен на изменения в окружающей среде.

В работах М.М. Поташник проектирование рассматривается как процесс подготовки описания несуществующего объекта в заранее заданных условиях, который нужно увидеть, придумать, изобрести. Описание объекта может быть задано по-разному: в виде текста, алгоритма, программы, чертежа, таблицы или комбинированно.

*Метод проектов* является основоположником проектной деятельности. Данный метод был предложен в начале двадцатого века американским педагогом Дж. Дьюи. Целью метода проектов является ориентирование на учет личных интересов обучающихся в образовательном процессе. В образовательных учреждениях, в которых процесс обучения был построен с использованием метода проектов, предоставляли обучающимся полное право выбора учебных занятий. Обучение было построено на самостоятельном выборе обучающимися тех видов деятельности, с помощью которых они приобретают новые знания, что также определяло содержание программы. Роль учителя состояла в оказании помощи обучающимся при необходимости. Одной из важнейших задач метода проектов являлась мотивация обучающихся к решению различных проблемных ситуаций, необязательно одной, предполагающих на данном этапе владение некоторым объемом знаний, который в следствии работы дополняется новыми, и с помощью проектной деятельности показывать практическое применение полученных знаний.

В российской системе образования внедрение метода проектов связано с именем С. Т. Шацкого (1905 г.), а также с книгой Е. Г. Кагарова «Метод проектов в трудовой школе» (1926 г.) В своей работе он поднимает вопросы о значении проектов, рассматривает их виды, структуру. Е. Г. Кагаров отмечает, что «сущность и ценность метода проектов в том, что он ставит задачей школы подыскание для детей дела, могущего привлечь их интерес и внимание,

дела, которое вполне соответствует их силам, в процессе работы дает полезные знания и навыки и, кроме того, в самом себе таит зародыши нового задания и импульс к его выполнению».

Проведенный нами анализ литературы показал, что понятие «метод проектов» разными авторами трактуется неодинаково. Одни ученые рассматривают метод проектов как технологию (Карпов Е.А., Николина В.В., Прокофьева Н.И., Чечель И.Д.), другие указывают на связь метода проектов с развивающим и проблемным обучением (Жинжило В.А., Левчук А.В., Николина В.В., Полат Е.С., Прокофьева Н.И., Чанилова Н.Г.), третьи подчеркивают, что в основе метода лежит самостоятельная творческая деятельность обучающихся и выделяют высокую значимость создания конечного учебного продукта (Матяш Н.В., Николина В.В., Ретивых М.В., Симоненко В.Д.).

В своих работах Е.С. Полат характеризует этот метод как «определенную совокупность учебно-познавательных приемов, которые позволяют решить ту или иную проблему в результате самостоятельных действий учащихся и предполагают презентацию этих результатов».

Многие отечественные исследователи занимались проблемой разработки видов проектов, их структурой и старались внедрить проектную деятельность на разных этапах образовательного процесса.

Г.К. Селевко дает определение *проектной деятельности*, как процессу обобщенного и опосредованного познания действительности, в ходе которого человек использует технологические, технические, экономические и другие знания для выполнения проектов по созданию культурных ценностей.

В исследованиях Н.В. Матяш *проектная деятельность* рассматривается как форма учебно-познавательной активности обучающихся, заключающаяся в мотивированном достижении сознательно поставленной цели по созданию творческих проектов, обеспечивающая единство и преемственность различных сторон процесса обучения и являющаяся средством развития личности субъекта учения.

По мнению М.В. Чановой, *проектная деятельность* является технологией проблемного обучения, в основе которой лежит самостоятельная творческая деятельность обучающихся, направленная на создание конечного учебного продукта. Таким образом, через конкретизацию сущности понятия, автор выделяет отличительные черты проектной деятельности (технология проблемного обучения и создание конечного продукта).

Таким образом, объединяя все вышесказанное можно сказать, что под *проектной деятельностью* обучающихся понимают целенаправленную учебно-познавательную деятельность обучающихся, в основании которой лежит мотивация создать новый продукт путем выполнения поставленных задач с обязательной презентацией конечного результата.

Основной единицей проектной деятельности является непосредственно сам учебный проект. Термин «*учебный проект*» применим как к работе обучающегося, так и к работе учителя.

Согласно Н.Ю. Пахомовой, *учебный проект с точки зрения обучающегося* – это деятельность, которая позволяет создавать что-то самостоятельно или в группе. В процессе работы появляется возможность максимально проявить себя, использовать весь имеющийся объем знаний, попробовать свои силы в создании чего-то нового, проявить свой творческий потенциал. Это деятельность, направленная на решение какой-то конкретной проблемы, которую предложил учитель или обучающиеся сформулировали сами, и которая представлена в виде цели и задач, которые необходимо решить. Конечный продукт (решение проблемы) – носит практический характер, и что особенно важно, значим для самих обучающихся.

*Учебный проект с точки зрения учителя* – это дидактическое средство, позволяющее обучать проектированию, т.е. целенаправленной деятельности по нахождению способа решения проблемы путем решения задач, вытекающих из этой проблемы при рассмотрении ее в определенной ситуации.



В современной педагогике проектную деятельность рассматривают как одну из личностно-ориентированных технологий обучения, совмещающую в себе проблемный подход, рефлексивные, исследовательские, поисковые и прочие методики. Следовательно, проектная деятельность понимается не только как один из способов организации взаимосвязанной деятельности учителя и обучающихся, но и как целостная «педагогическая технология», которая:

а) предполагает возможность диагностического целеполагания, планирования и проектирования процесса обучения. Поэтапной диагностики, варьирования средств и методов с целью коррекции результатов;

б) включает в себя обоснованную систему приемов и форм деятельности учителя и обучающихся на различных этапах реализации учебного процесса, сформулированные критерии оценки результатов этой деятельности;

в) применяется при изучении разных школьных дисциплин в образовательных учреждениях различного типа.

Проиллюстрируем соотношение понятий «проектная деятельность», «метод проектов», «учебный проект» с помощью диаграммы Эйлера (рис.1), где А – проектная деятельность, В – метод проектов, С – учебный проект.

Рис. 1. Соотношение понятий

Рассмотрим основные черты проектной деятельности.

Одной из основных черт проектной деятельности является то, что цель, в основе которой лежит проблемная ситуация, решается не напрямую, а путем достижения многих поставленных задач.

Второй особенностью является мотивация авторов, которые создают проект. Вследствие чего получаем, что при работе над проектом должны быть решены не только проблемные вопросы, но и сам замысел обучающегося.

Третьей важной особенностью проектной деятельности является её адресный характер. В ходе работы над проектом обучающийся полностью выражает своё мнение, касающееся заявленной проблемы. Следовательно, автор работы ищет адресата, т.е. человека, к которому обращено его высказывание, оформленное в виде конечного продукта. По этой причине проектная деятельность имеет ярко выраженную социальную окраску, и в конечном итоге является одним из немногих социально значимых действий, доступных обучающемуся.

Проектная деятельность способствует широкому развитию у обучающегося исследовательских качеств, вносит разнообразие в развитие и саморазвитие обучающегося. Она способствует активизации познавательной деятельности, развивает креативность и одновременно способствует формированию определенных личностных качеств, которые, по мнению Леонтьева А.Н., развиваются лишь в деятельности и не могут быть усвоены вербально. К таким качествам можно отнести умение выбирать из различных источников необходимый материал, брать на себя ответственность за выбранное решение, анализировать результаты своей деятельности.

На основании анализа исследований по данной проблеме можно выделить следующие функции, выполняемые проектной деятельностью:

- управляющая функция – ориентация на цель, планирование, контроль успешности продвижения к цели;
- развивающая функция – прогнозирование процессов становление социально значимых качеств личности и поддержка ее индивидуальности,

качественного изменения субъектов и объектов, появления новых форм бытия, инноваций и нововведений, преобразование их внешних и внутренних связей;

- познавательная функция – конструирование содержание учебной деятельности и процесса ее реализации, выявление тенденций развития образовательной системы, проникновение в будущее.

То есть проектная деятельность совмещает в себе элементы различных видов деятельности, например, таких, как: познавательная, практическая, игровая, учебная, теоретическая, социально-значимая, ценностно-ориентационная, коммуникативная и др. Таким образом, можем сделать вывод о том, что в проектной деятельности следует осуществлять развивающее обучение.

Проектная деятельность является не заменой предметного обучения, а используется вместе с ним, расширяя и дополняя его.

## 1.2. Виды проектной деятельности и этапы её организации

Для того, чтобы установить этапы организации проектной деятельности, необходимо определить виды проектов, из каких элементов они состоят, каковы роли учителя и обучающегося при работе над проектом.

На начальном этапе работы с проектом, необходимо понимать, что проекты, в зависимости от цели исследования, могут иметь свою специфику. Вопросом типологии проектов занимались различные авторы, например, Е.С. Полат, Г.К. Селевко и другие. Основываясь на анализе работ этих авторов, стоит отметить, что для того, чтобы определить тип проекта, необходимо выделить его доминирующий вид деятельности. Представим краткое описание доминирующих аспектов в соответствии с типами проектов (табл. 1).

Таблица 1

### Типология проектов

Тип проекта	Характеристика проекта
<i>по методу, доминирующему в проекте</i>	
Исследовательский	В основе проекта лежит строгая структура, состоящая из определенной проблемы исследования, обоснования актуальности, его предмета и объекта, выдвижения гипотез, обозначения задач, методов исследования, определение путей решения поставленной проблемы, в том числе с использованием эмпирических методов исследования. Итогом проекта является оформление результатов, формулированием выводов и обозначением дальнейшей перспективы исследования.
Творческий	Структура таких проектов в первую очередь зависит от жанра, выбранного для представления результатов. Они не содержат строгой структуры исследования и вся деятельность по созданию проекта зависит от итогового результата (сочинение, фильм, экскурсия, выставка и т.д.).
Информационный	Основной задачей таких проектов является сбор и обработка информации о каком-либо явлении, объекте, и дальнейшее представление этой информации широкой аудитории. Данные проекты требуют хорошо продуманной и гибкой структуры, с возможностью её корректировки при необходимости.
Практико-ориентированный	Основным ориентиром таких проектов являются социальные интересы участников проекта, которые четко определяют результат деятельности.

Тип проекта	Характеристика проекта
	При работе над проектом необходимы хорошо продуманная структура и распределение обязанностей между участниками. Главную роль здесь играет представление результатов деятельности и их внешняя оценка.
Игровой	Структура таких проектов открытая, постоянно дополняемая в ходе работы. Основным видом деятельности является игра. Задача участников проявить творчество, принять роли, обусловленные характером и содержанием проекта.
<i>по характеру координации</i>	
Непосредственный (с открытой координацией)	Главная задача учителя (руководителя проекта) направлять работу участников, организовывать отдельные этапы работы над проектом. Учитель играет роль консультанта, не навязывая своего мнения.
Со скрытой координацией	Учитель выступает в роли равноправного участника проекта. Принимает участие в работе на каждом из этапов создания проекта.
<i>по характеру контактов</i>	
Внутренний (региональный)	Создание проекта происходит внутри ОУ между классами, параллелями классов, между различных ОУ, также внутри региона или страны в целом. Связь происходит с помощью интернет-ресурсов.
Международный	Участниками таких проектов являются представители разных стран.
<i>По числу участников</i>	
Индивидуальные	Над созданием проекта работает один человек
Парные	Работа над проектом происходит в паре, состоящей из обучающихся одного класса, школы, города и т.д.
Групповые	Разработкой проекта занимается группа обучающихся, состоящая из трёх и более человек из одного класса, школы, города и т.д.
<i>По продолжительности</i>	
Краткосрочный	Проекты могут быть разработаны в течение нескольких уроков как по одному предмету, так и как междисциплинарные. Предназначены для решения небольшой проблемы или части более крупной.
Среднесрочный	Работа над проектом происходит в срок от недели до месяца. В основном такие работы являются междисциплинарными и направлены на решение крупных проблем или нескольких взаимосвязанных.
Долгосрочный	Такой проект создается в срок от месяца и более и также как среднесрочный направлен на решение класса взаимосвязанных проблем.

По мнению И.С. Сергеева, работа с проектной деятельностью – это один из сложнейших видов деятельности педагога в образовательном процессе. Большая часть методов обучения выставляет стандартные требования к

организации деятельности, а именно, наличие обучающихся, учителя и необходимого учебного материала. К организации проектной деятельности выставляются другие особые требования:

- на первый план выступает необходимость в наличии социально значимой проблемы (информационной, творческой, исследовательской), которая повысит мотивацию обучающихся;
- работа над проектом начинается с определения вида конечного продукта и формы его представления, т.е. с проектирования;
- важно грамотно разработать план проекта, в котором будет указан перечень конкретных действий каждого из участников, сроков выполнения и промежуточных результатов, которые в свою очередь позволят распределить обязанности между всеми участниками;
- исследовательская работа обучающихся – это обязательное требование проекта.

Из вышесказанного следует, что проектная деятельность, как и любая другая, обладает своими отличительными чертами. Таким образом, можем сделать вывод о том, что особенностью проектов будет являться поиск и обработка информации, которая затем будет представлена участникам проектной группы.

Результатом работы над любым проектом является какой-то конечный продукт.

Обучение проектной деятельности происходит с опорой на следующие принципы, которые соответствуют основным задачам ФГОС ООО:

1. *Индивидуальность* деятельности обучающихся выражается в возможности самостоятельно определить пути решения проблемы, задач, заинтересованность в успешном выполнении проекта, возможность в полной мере проявить себя в процессе создания проекта.

2. *Креативность* позволяет обучающимся активизировать мыслительную деятельность и направить её на постановку проблемы и поиск путей её решения.

3. *Связь теории с практикой* инициирует необходимость проверки теоретических положений на практике.

4. *Алгоритмичность деятельности* выражается в организации деятельности обучающихся таким образом, чтобы она соответствовала этапам работы над проектом.

5. *Коммуникативный характер деятельности* основывается на осуществлении групповых форм учебной деятельности, которые характерны для создания проектов, а также на общении с учителем, который зачастую выполняет функцию консультанта. Появляется возможность объединения обучающихся в группы по интересам, имеющие общую цель, методы и способы деятельности, направленные на достижение общего результата.

6. *Интегративность содержания проекта* позволяет синтезировать знания, умения и способы деятельности, которые необходимы при создании проекта, часто с использованием межпредметных связей.

С целью достижения задачи №3, рассмотрим содержание этапов и организацию деятельности учителя и обучающихся, представленные в работах различных авторов.

Отметим, что все виды деятельности, которые используются при создании проекта подчинены определенной логике, которая выражается в алгоритмичности этапов работы. То есть, после того, как учитель предъявил тему проекта, обучающимся необходимо самостоятельно попытаться сформулировать цели и задачи, при необходимости организовать группы и распределить обязанности, с назначением ответственных лиц, выбрать методы исследования и спроектировать конечный результат.

Имеется ряд работ, в которых раскрыты этапы работы над проектом. Рассмотрим классификации таких авторов, как Г.К. Селевко, Е.С. Полат и Н.Ю. Пахомовой.

Этапы разработки проекта по Г.К. Селевко:

1) организационно-подготовительная стадия – проблематизация, разработка проектного задания (выбор);

- 2) разработка самого проекта (планирование);
- 3) технологическая стадия;
- 4) заключительная стадия (оформление результатов, общественная презентация, обсуждение, саморефлексия). Представим описание подэтапов, деятельности учителя и обучающегося по Г.К. Селевко в таблице 2.

Таблица 2

**Деятельность учителя и обучающихся на разных этапах работы над проектом**

Подэтапы	Деятельность учителя	Деятельность обучающегося
<b>1. Погружение в проект. Проблематизация, разработка проектного задания</b>		
1.1. Выбор проблемы (темы) проекта -Поиск проблемы -Выбор и обоснование проекта	-Отбирает возможные темы и предлагает их обучающимся -Предлагает обучающимся совместно выбрать тему проекта -Участвует в обсуждении тем, предложенных обучающимися	-Обсуждение и принятие общего решения по теме -Группа обучающихся совместно с учителем отбирает темы и предлагает классу для обсуждения -Самостоятельный подбор тем и их обсуждение с другими обучающимися
1.2. Анализ предстоящей деятельности. Выделение подтем в теме проекта	-Предварительно вычленяет подтемы и предлагает учащимся для выбора -Вместе с обучающимися проводит эту работу	-Каждый обучающийся выбирает себе подтему -Активное обсуждение и предложение вариантов подтем
1.3. Формирование творческих групп	-Проводит организационную работу по объединению обучающихся, выбравших себе конкретные подтемы и виды деятельности	После определения своей деятельности формируются в минигруппы
<b>2. Разработка проекта (планирование и организация деятельности)</b>		
2.1. Подготовка материалов к исследовательской работе: формулирование вопросов, на которые нужно ответить, задание для групп, отбор литературы	-Если проект большой, то учитель заранее разрабатывает и предлагает задания, вопросы для поисковой деятельности и литературу -В зависимости от возраста степень участия обучающихся будет разной	-Участие в разработке заданий для младших, определение их сильных и слабых сторон, возможностей и трудностей отдельными обучающимися старших классов
2.2. Планирование технологического процесса	-Консультирует, координирует работу, стимулирует деятельность обучающихся	-Осуществление поисковой деятельности, информирование друг друга о ходе работы, применение коллективного



		решения проблем и т.п.
--	--	------------------------

*Продолжение табл. 2*

Подэтапы	Деятельность учителя	Деятельность обучающегося
2.3. Разработка документации. Определение форм выражения итогов (результатов) проектной деятельности	-Принимает участие в обсуждении, контролирует по общим направлениям	-В группах, а затем в классе обсуждение плана деятельности, формы представления результата исследовательской деятельности: видеофильм, альбом и т.д.
3. Технологическая стадия (осуществление деятельности)		
3.1. Организация рабочего места	-Следит за соблюдением трудовой и технологической дисциплины, культуры труда	-Осуществление самоактуализации своей деятельности. Исследовательская, творческая, информационная, социально-значимая деятельность. -Моделирование. Консультации при необходимости
3.2. Выполнение технологических действий		
3.3. Моделирование		
4. Заключительная стадия (презентация и оценка результатов)		
4.1. Оформление результатов	-Консультирует, координирует работу групп, стимулирует их деятельность	-Вначале по группам, а потом во взаимодействии с другими группами оформление результатов в соответствии с принятым формами
4.2. Защита, презентация (контроль и испытание) результатов	-Организует экспертизу, например, приглашает в качестве экспертов обучающихся старших классов или параллельный класс, родителей и т.д.	-Доклад о результатах своей работы, демонстрируют их
4.3. Саморефлексия. Оценка результатов и процесса в целом	-Оценивает свою деятельность по педагогическому руководству деятельностью обучающихся, учитывая их оценки	-Осуществление самооценки. Результаты, участие в коллективном обсуждении, групповая рефлексия

В дополнение к описанию этапов работы, Г.К. Селевко выделяет критерии оценивания результатов проектной деятельности:

- компетентность в области познавательной деятельности;

- умение критически относиться к найденной информации из различных источников;
- умение выбирать необходимые методы исследования;
- коммуникативные умения;
- умения проводить анализ своей деятельности и делать выводы, сопоставлять цель с результатом деятельности.

Е.С. Полат выделяет другие этапы работы над проектом. Представим содержание этапов и организацию деятельности учителя и обучающихся в виде таблицы (табл. 3).

Таблица 3

### Этапы работы над проектом

Этапы работы над учебным проектом	Содержание этапов работы над проектом	Деятельность учителя и обучающегося
Мотивационный этап	Определение проблемы и вытекающих из нее задач исследования	<u>Учитель</u> заявляет общий замысел, создает положительный мотивационный настрой.  <u>Обучающиеся</u> обсуждают, предлагают собственные идеи.
Планирующий (подготовительный) этап	Выдвижение гипотез, их решений	<u>Действия обучающихся</u> заключаются в сборе материала, работе с литературой и другими источниками, непосредственно выполнение проекта. <u>Учитель</u> наблюдает, координирует, поддерживает, сам является информационным источником;
	Обсуждение методов исследования (анализ, наблюдение, опрос и т.д.)	
	Обсуждение способов оформления конечных результатов (доклад, игра, видеоклип и др.)	
Информационно-операционный этап	Сбор, систематизация и анализ полученных данных	<u>Обучающиеся</u> собирают материал, работают с литературой и другими источниками, непосредственно выполняют проект. <u>Учитель</u> : наблюдает, координирует, поддерживает, сам является информационным источником;
Практический (моделирующий)	Выполнение запланированных действий	<u>Обучающиеся</u> непосредственно выполняют и оформляют проект.  <u>Учитель</u> помогает в решении возникающих у обучающихся

		вопросов.
Контрольно-коррекционный	Подведение итогов, оформление	Обучающиеся осуществляют самооценку готовности

Продолжение табл. 3

Этапы работы над учебным проектом	Содержание этапов работы над проектом	Деятельность учителя и обучающегося
	результатов, презентация	к защите проекта <u>Учитель</u> координирует готовность обучающихся к защите проекта
Рефлексивно-оценочный		<u>Обучающиеся</u> представляют продукт собственной проектной деятельности, осуществляют устную или письменную самооценку, участвуют в коллективном обсуждении и содержательной оценке результатов и процесса работы. <u>Учитель</u> выступает участником коллективной оценочной деятельности, координирует, направляет рефлексивно-оценочную деятельность обучающихся

Н.Ю. Пахомова выделяет следующие этапы:

- 1) погружение в проект;
- 2) организация деятельности;
- 3) осуществление деятельности;
- 4) презентация результатов.

Представим деятельность учителя и обучающихся на различных этапах работы над проектом в таблице (табл. 4).

Таблица 4

**Деятельность учителя и обучающихся на различных этапах работы над проектом**

Учитель	Обучающийся
<i>1 этап – погружение в проект</i>	
Формулирует: (формулирование учебного проекта производится с учетом возраста обучающихся)	Осуществляют:
1) проблему проекта;	1) личностное присвоение проблемы;
2) сюжетную ситуацию;	2) вживание в ситуацию;
3) цель и задачи	3) принятие, уточнение и конкретизация цели и задач
<i>2 этап – организация деятельности</i>	

Организует деятельность – предлагает (оснащает всем необходимым и создает условия для самостоятельной работы):	Осуществляют:
--	---------------

*Продолжение табл. 4*

<b>Учитель</b>	<b>Обучающийся</b>
4) организовать группы;	4) разделение на группы;
5) распределить роли;	5) распределение ролей;
6) спланировать деятельность по решению задач проекта;	6) планирование работы;
7) выбор возможных форм презентации результатов	7) выбор формы и способов презентации предполагаемых результатов
<b>3 этап – осуществление деятельности</b>	
Не участвует, но:	Работают активно и самостоятельно:
8) консультирует обучающихся при необходимости;	8) консультируются при необходимости;
9) дает новые знания при необходимости;	9) выполняют поиск недостающей информации;
10) репетирует с обучающимися предстоящую презентацию	10) готовят презентацию результатов
<b>4 этап - презентация</b>	
Принимает отчет:	Демонстрируют:
11) обобщает и резюмирует полученные результаты;	11) понимание проблемы, цели и задач;
12) подводит итоги обучения;	12) умение планировать и осуществлять работу;
13) оценивает умения: общаться, слушать, обосновывать свое мнение, толерантность и др.;	13) найденный способ решения проблемы;
14) акцентирует внимание на воспитательном моменте: умении работать в группе на общий результат и др.	14) рефлексия деятельности и результата;

Анализ литературы по теме исследования показал, что современный учитель для достижения целей обучения проектной деятельности должен уметь различать виды проектов, понимать какой вид деятельности выбирать на конкретных этапах работы над проектом, какую роль выполнять (консультанта или непосредственного участника).

Проектная деятельность предоставляет обучающемуся большой выбор новой для него деятельности, способствует появлению широкого круга интересов и является значимым средством развития личности. Эта деятельность активизирует умственные действия и направлена на развитие познавательных процессов.



## **ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 1**

В первой главе в ходе анализа литературы по теме исследования были выявлены различные подходы к определению понятий «проект», «проектная деятельность». Анализ этих подходов позволил выделить основные признаки данных понятий, на основании которых видно отличие проектной деятельности от исследовательской.

В ходе исследования были рассмотрены различные типологии проектов. Анализ этих подходов позволил установить, что все рассматриваемые классификации имеют сходную структуру. Были выделены доминирующие аспекты деятельности, на основании которых стало возможным составить общую сводную таблицу по типологии проектов.

Также, в результате проведенного исследования, нам удалось установить, что на данном этапе существует большое разнообразие классификаций этапов проектной деятельности. Нетрудно заметить, что все этапы различаются незначительно. Резюмируя, можно выделить четыре основных этапа: подготовительно-организационный, практический (разработка проекта), представление конечного продукта, оценивание и рефлексия.

Работая на первом этапе, учитель предлагает обучающимся некоторую проблему. Обучающимся необходимо, на основании предложенной проблемы, сформулировать тему проекта. Затем составляется примерный план дальнейшей работы, цели и задачи исследования, формулируется актуальность выбранной темы, выбираются возможные источники информации.

Второй этап – практический, то есть непосредственная разработка проекта. На этом этапе обучающиеся осуществляют поиск и обработку информации, которая позволит решить индивидуальные и общие задачи, выбирается вид представления конечного продукта, исходя из типа проекта. Осуществляется обсуждение полученных промежуточных результатов, при необходимости происходит коррекция плана действий.

На этапе представления конечного продукта, обучающиеся заканчивают работу над проектом, оформляют и предъявляют полученные результаты. Этот этап не менее важен, чем первый и второй. Успешная защита проекта во многом зависит от его представления.

На четвертом этапе происходит анализ и обсуждение конечного продукта, после его защиты. Возможно проведение как общей дискуссии, так и личная беседа учителя и авторов проекта. Этот этап важен как для самих авторов проекта, поскольку им необходимо будет отвечать на вопросы, рефлексировать, так и слушателям, которым представится возможность задать вопросы или внести свои предложения.

Анализируя все вышесказанное, можно утверждать, что в современной педагогике достаточно полно описаны этапы организации проектной деятельности. Соблюдение этих этапов как учителем, так и обучающимися приведет к успешному созданию проекта. Заметим, что активная и усердная работа обучающихся и учителя необходима на каждом этапе проектной деятельности.

Таким образом, проектная деятельность представляет собой индивидуальную или групповую учебно-познавательную, информационную, исследовательскую или творческую деятельность, имеющую цель, согласованные методы, способы деятельности, направленную на достижение запланированного результата деятельности. Важнейшим условием проектной деятельности является наличие этапов проектирования (актуальность работы, определение целей и задач проекта, поиск и обработка необходимой информации, заранее выработанных представлений о конечном продукте деятельности) и реализация и представление проекта, включая его оценку и рефлексию результатов деятельности.

Однако, стоит заметить, что современная российская система образования, которая в свою очередь отказывается от традиционного представления результатов обучения в виде формирования знаний, умений и

навыков, требует в процессе обучения формировать человека, способного к самореализации и самоопределению.

Проектная деятельность, которая предполагает использование совокупности исследовательских и проблемных методов, является наиболее практикоориентированной, что позволяет в полной мере говорить о её соответствии требованиям ФГОС.



## **ГЛАВА 2. ОРГАНИЗАЦИЯ ПРОЕКТНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ**

### **2.1 Анализ познавательной сферы обучающихся 10-11 классов**

Для выделения характеристик, необходимых для организации учебной и проектной деятельности обучающихся 10-11 классов, рассмотрим особенности их познавательной сферы.

Обучающихся 10-11 классов, т.е. старший школьный возраст, относят к такому возрастному периоду в развитии человека, как ранняя юность, которая длится от 15 до 18 лет.

Обучение в старших классах школы связано со значительным изменением и усложнением содержания учебного материала, увеличением его объема, что повышает уровень требований к обучающимся. От них ожидают достаточной сформированности теоретического мышления, гибкости, универсальности, продуктивности познавательной деятельности, четкости, самостоятельности в решении когнитивных задач.

У старшеклассников значительно повышается интерес к учению, по сравнению с подростковым возрастом. Учение приобретает непосредственный жизненный смысл. Усиливается потребность в самостоятельном приобретении знаний, познавательные интересы приобретают широкий, устойчивый и действенный характер. Индивидуальная направленность и избирательность интересов связана с жизненными планами.

К концу подросткового возраста общие умственные способности уже сформированы, поэтому на протяжении юности происходит формирование индивидуального стиля умственной деятельности, т.е. устойчивых совокупностей индивидуальных вариаций в способах восприятия, запоминания и мышления, за которым стоят различные пути приобретения, накопления, переработки и использования материала.

У обучающихся 10-11 классов происходит совершенствование памяти. Увеличивается не только её объем, но и в значительной мере меняются способы запоминания. Вместе с произвольным запоминанием наблюдается

широкое применение рациональных приемов произвольного запоминания материала. Старшие школьники приобретают метакогнитивные умения (текущий самоконтроль и саморегуляция), которые влияют на эффективность образовательного процесса. Другими словами, старшеклассники, по сравнению с обучающимися других возрастных групп, обладают более устойчивым контролем над процессами памяти: они могут свободнее запоминать, сохранять и воспроизводить в памяти выученный школьный материал.

В этом возрасте продолжается развитие абстрактно-логического мышления. У обучающихся 10-11 классов совершенствуется владение сложными интеллектуальными операциями анализа и синтеза, теоретического обобщения и абстрагирования, аргументирования и доказательства. Для них становится характерными установление причинно-следственных связей, систематичность, устойчивость и критичность мышления, самостоятельная творческая деятельность.

Кроме указанного выше следует отметить, что в этом возрасте интеллектуальное развитие предполагает выход на качественно новый уровень, связанный с развитием творческих способностей и предполагает не только усвоение информации, а проявление интеллектуальной инициативы и создание чего-то нового: способность увидеть проблему, поставить и переформулировать вопросы, находить нестандартные решения.

Наряду уже с указанными особенностями познавательной сферы обучающихся 10-11 классов, следует отметить, что развитие цифровых технологий повлекло за собой необходимость рассматривать и те особенности, которые присущи им как представителям нового поколения - поколения «цифровых» детей.

Современные подростки ежедневно сталкиваются с огромным количеством информации, представленной в цифровом виде. По мнению А.С. Дятлова «информация на сегодняшний день становится универсальной общенаучной категорией».

Исследования ученых и психологов, проведенные над поколением Z, демонстрируют такие изменения, как: ослабление внимания к чтению книг; замена данного вида деятельности на сетевое общение; возможность получения информации без умственных напряжений.

Основной отличительной особенностью этого поколения является клиповое мышление. Клиповость - это способность краткого и красочного восприятия окружающего мира посредством короткого, яркого посыла, воплощенного в форме видеоклипа, теленовостей или в другом аналогичном виде.

Ведущую роль в формировании «клипового мышления» выполняют средства массовой информации – телевидение и Интернет, которые широко применяют приемы «клиповой» эстетики, формируя человека, обладающего новым визуальным восприятием, а также широкое распространение мобильных технологий.

В связи с этим, существует такая тенденция – неспособность многих обучающихся системно воспринимать информацию, системно мыслить и, соответственно, излагать свои мысли. Часто после произнесенной (написанной) фразы, обучающийся не пытается понять ее целиком, а выхватывает кусок-раздражитель, на который у него уже готов заранее ответ.

Портрет современного подростка демонстрирует, что изменения, произошедшие в социализации и развитии, обществе и технологиях, актуализируют проблему поиска новых педагогических подходов к организации обучения и воспитания.

Старшие школьники в каждый момент своей активности являются субъектом деятельности, общения, познания, однако, успешность их самоопределения в первую очередь обусловлена опытом их самопрезентации в каждой из этих областей.

Таким образом, на основании вышесказанного можно выделить следующие характеристики обучающихся 10-11 классов:

- 1) развитие абстрактно-логического мышления;

- 2) наличие «клипового» мышления;
- 3) развитие умения оперировать абстрактными, теоретическими, гипотетическими и дедуктивными знаниями;
- 4) увеличение объёма памяти;
- 5) умение выбирать наиболее рациональные приёмы усваивания учебного материала;
- 6) умение применять сложные операции анализа, синтеза, абстрагирования, обобщения и др.;
- 7) умение критически мыслить, искать обоснованные доказательства;
- 8) формирование понятийного аппарата;
- 9) наличие более развитой кратковременной памяти;
- 10) развитие внимания, что обуславливает наиболее устойчивый темп работы;
- 11) способность действовать в условиях многозадачности;
- 12) увеличение интереса к самообразованию;
- 13) развитие специальных особенностей (филологических, математических и др.), которые влияют на определение будущей профессии.

## 2.1 Учебный проект с методическими комментариями

С целью иллюстрации приведенных ранее теоретических положений и задач № 5-6 составим таблицу с примерным перечнем электронных образовательных ресурсов (ЭОР), которые можно использовать в процессе организации проектной деятельности на каждом этапе работы. А также представим методическое сопровождение и примерное наполнение учебного проекта обучающегося 10-11 класса на тему «Применение производной и интеграла в экономике».

Как указано в п. 2.1 портрет современного подростка актуализирует проблему поиска новых педагогических подходов к организации обучения и воспитания, появляется необходимость наполнения каждого из этапов организации проектной деятельности современными технологиями.

Вопросом применения электронных образовательных ресурсов (ЭОР) занимались такие авторы как: Б. Е. Стариченко, Л. В. Сардак, А. В. Слепухин, а также психолого-дидактические исследования С. Р. Домановой, Е. С. Полат и др. Все исследования в этой области подтверждают необходимость использования различных технологий, которые позволяют организовать учебную деятельность так, чтобы обучающийся мог самостоятельно приобретать необходимые знания, проводить исследования, находить решение возникающих проблем, планировать свою деятельность.

Представим в таблице (табл. 5) каждый этап в отдельности и приведем примеры программ, программных обеспечений и сайтов, которые можно на них использовать.

*Таблица 5*

*Возможности использования ЭОР в организации проектной деятельности*

Название этапа	Рекомендации к применению онлайн-ресурсов	Примеры онлайн-ресурсов
Подготовительно-организационный	Поскольку на данном этапе происходит формулирование темы проекта и составления плана	Trello, Smartsheet, Google календарь

Название этапа	Рекомендации к применению онлайн-ресурсов	Примеры онлайн-ресурсов
	работы, то в первую очередь, удобно использовать различные планировщики, календари. Если реализуется ДОТ, то необходимо использовать различные средства связи (мессенджеры, конференции).	Skype, Google meet, Zoom, Discord (все представленные ресурсы можно использовать на смартфоне)
Практический	Так как на данном этапе обучающиеся осуществляют поиск и обработку необходимой информации, для того, чтобы скорректировать и упростить их работу, можно рекомендовать различные образовательные ресурсы, которые уже содержат в себе видеоуроки, лекции, упражнения и т.д.; онлайн-библиотеки, музеи, театры, различные образовательные видеоканалы. Онлайн-ресурсы, при необходимости, позволяют создавать ментальные карты, карты времени, проводить эксперименты в виртуальных лабораториях. Также, можно воспользоваться облачными ресурсами, которые позволяют совместное редактирование документов. Остаётся необходимость использования различных средств связи.	<i>Образовательные ресурсы:</i> ЯКласс, Математические этюды, Youtube; <i>ментальные карты, карты времени, лаборатории:</i> Coogle, Cacao, Piktochart, Time.graphics. <i>облачные сервисы:</i> Google Документы, Google Диск ; <i>средства связи:</i> Skype, Google meet, Zoom, Discord.
Представление конечного продукта	На данном этапе происходит представление уже готового проекта, соответственно, выбор ресурсов зависит от выбранного ранее вида конечного продукта: это может быть сборник задач, тренаж, видеоролик, сайт, блог и прочее по теме проекта. Защиту проекта можно провести с помощью видеоконференции.	Prezi, Renderforest, Geogebra, Google meet, Zoom, Discord.
Оценивание и рефлексия	Для проведения оценивания и рефлексии можно воспользоваться онлайн-опросниками, которые автоматически собирают статистику, и средствами связи.	Mentimeter, Learningapps, Google формы. Google meet, Zoom, Discord.

В данной таблице этапы организации проектной деятельности представлены в общем виде, но её можно конкретизировать под этапы, выделенные другими авторами в своих работах. Стоит отметить, что перечень ресурсов постоянно пополняется, поскольку развитие современных технологий не останавливается.

Далее рассмотрим методическое сопровождение, а также наполнение учебного проекта обучающегося 10-11 класса по теме «Применение производной и интеграла в экономике».

### **Методическое сопровождение проекта обучающегося**

Данную работу целесообразно выполнять обучающимся 10-11кл., т.е. старшим школьникам. Работа носит как теоретический, так и практический характер, поскольку итогом работы будет являться сборник задач. Эта работа актуальна для подготовки к ЕГЭ, олимпиадам, а также носит практико-ориентированный характер, т.е. помогает выпускникам, которые уже определились со своей профессией и направлены в дальнейшем изучать экономику.

В процессе работы над проектом перед обучающимся ставится цель, которая достигается путём поочередного решения задач, рассматриваются различные экономические задачи.

Рассмотрим этапы работы над проектом, выделенные Е.С. Полат, поскольку деятельность учителя и обучающегося, а также предполагаемые результаты на каждом из этапов работы (табл. 6).

Таблица 6

Этапы работы над проектом «Применение производной и интеграла в экономике»

Этапы работы над учебным проектом	Содержание этапов работы над проектом	Деятельность учителя и обучающегося	Предполагаемые результаты	Примеры ресурсов
Мотивационный этап	Определение проблемы и вытекающих из неё задач исследования	<p><u>Учитель:</u> предлагает обучающимся тему проекта «Применение производной и интеграла в экономике», аргументируя выбор этой темы тем, что экономическому смыслу производной и интеграла не уделяется времени на уроках, но при этом в ЕГЭ есть экономические задачи, для решения которых необходимо иметь эти знания. Также тема проекта будет актуальна для тех обучающихся, которые определились с выбором профессии. В данном проекте необходимо дать определения производной и интегралу, рассмотреть их экономический смысл, показать применение при решении олимпиадных задач и ЕГЭ.</p> <p><u>Обучающиеся</u> обсуждают, предлагают собственные идеи, задают уточняющие</p>	Обучающиеся определяют с темой работы, а также с обоснованием актуальности выбранной темы	Поскольку основой этого этапа является беседа с обучающимися, то, к примеру, в рамках дистанционного обучения возможно применение ресурсов, которые обеспечивают онлайн-беседу: Skype, Google meet, Zoom, Discord. Также, для того, чтобы повысить интерес обучающихся к данной теме, можно предложить им ознакомиться с программами обучения ВУЗов, в которых будет актуальна эта тема (поиск программ с помощью поисковых систем).



Этапы работы над учебным проектом	Содержание этапов работы над проектом	Деятельность учителя и обучающегося	Предполагаемые результаты	Примеры ресурсов
		<p>вопросы, например:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ что будет являться конечным продуктом;</li> <li>✓ какими источниками информации можно пользоваться;</li> <li>✓ какого объёма должна быть работа;</li> </ul> <p>и другие вопросы.</p>		
Планирующий (подготовительный) этап	<p>Выдвижение гипотез, их решений</p> <p>Обсуждение методов исследования (анализ, наблюдение, опрос и т.д.).</p> <p>Обсуждение способов оформления конечных результатов (доклад, игра, видеоклип и др.).</p>	<p>Учитель выдвигает возможные цель и задачи проекта:</p> <p>цель: составить комплект задач на применение приложения производной и интеграла;</p> <p>задачи:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ изучить литературу по темам «Производная и её экономический смысл», «Интеграл и его экономический смысл»;</li> <li>✓ изучить рекомендации по решению экономических задач с помощью приложений производной и интеграла;</li> <li>✓ рассмотреть и решить экономические задачи,</li> </ul>	<p>Оформление введения, постановка целей и задач, составление примерного списка источников информации.</p> <p>Прогнозирование вида итогового продукта.</p>	<p>На данном этапе важно помочь обучающимся правильно распределить время выполнения работы. Для этого можно воспользоваться ресурсом Trello, который позволяет создавать колонки, в которых будут расписаны возможные задачи, проблемы и т.д.</p> <p>Также, каждую из “карточек” (список задач) можно заполнить какими-либо вложениями, подпунктами и прочим. Есть возможность добавлять анимации, автоматизировать карточки и пр. Также возможна привязка к</p>

Этапы работы над учебным проектом	Содержание этапов работы над проектом	Деятельность учителя и обучающегося	Предполагаемые результаты	Примеры ресурсов
		<p>в том числе из ЕГЭ и олимпиад, на применение приложений производной и интеграла.</p> <p><u>Обучающиеся</u> соглашаются с представленными возможными вариантами и при желании дополняют своими. Происходит обсуждение источников информации.</p> <p>Выдвигаются способы оформления конечных результатов работы, а именно доклад, презентация и готовый сборник задач.</p> <p>Учитель даёт примерный список источников информации и задания:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• воспользуйтесь своим учебником по алгебре и найдите в нем определения производной и интеграла;</li> <li>• рассмотрите учебники других авторов и сравните их подход к определению с подходом автора вашего учебника;</li> </ul>		сервисам Google (календарь, диск и др).

Этапы работы над учебным проектом	Этапы работы над учебным проектом	Этапы работы над учебным проектом	Этапы работы над учебным проектом	Этапы работы над учебным проектом
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике: учебник/ Под общ. ред. д.э.н., проф. Сидоровича А.В. М.: Издательство Дело и Сервис, 2001. 368 с</li> <li>Воспользуйтесь журналом «Молодой ученый» за 2015 №19(99) и найдите в нём необходимую вам информацию;</li> </ul> <p>и другие.</p>		
Информационно-операционный этап	Сбор, систематизация и анализ полученных данных	<p><u>Обучающиеся</u> собирают материал, работают с литературой и другими источниками, отбирают подходящие для работы задачи.</p> <p><u>Учитель:</u> координирует, отвечает на возникающие в ходе работы вопросы, уточняет и дополняет информацию.</p>	Наличие отобранного и проработанного списка источников информации, материала.	На данном этапе обучающиеся всё также могут пользоваться различными поисковыми системами, планировщиками, образовательными ресурсами, видеоканалами.
Практический (моделирующий)	Выполнение запланированных действий	<p><u>Обучающиеся</u> непосредственно выполняют и оформляют проект, т.е. структурируют его под поставленные задачи:</p>	Создание основной части проекта.	Для организации совместной работы над текстом можно воспользоваться Google Документами, которые позволяют редактировать

Продолжение табл. 6

Этапы работы над учебным проектом	Этапы работы над учебным проектом	Этапы работы над учебным проектом	Этапы работы над учебным проектом	Этапы работы над учебным проектом
		<p>введение;  понятие производной и её  экономический смысл;  производная в экономической  теории; понятие интеграла и его  экономический смысл;  интеграл в экономической теории;  решение экономических задач на  применение приложений  производной и интеграла;  заключение.  Учитель проверяет информацию,  при необходимости вносит  коррективы, помогает в решении  возникающих у обучающихся  вопросов.</p>		<p>документ совместно, вносить  какие-то комментарии, которые  обучающиеся увидят и смогут  внести необходимые  изменения. Также, для  организации общения можно  воспользоваться средствами  связи, которые ранее уже были  указаны.</p>
Контрольно-коррекционный	Подведение итогов, оформление результатов, презентация	<p>Обучающиеся осуществляют  самооценку готовности к защите  проекта, готовят презентацию,  защитное слово и сборник.  Учитель координирует готовность  обучающихся к защите проекта,  проверяет корректность  составленных презентации и  защитного слова.</p>	Оформление итогового варианта проекта, защитное слово, презентация, сборник.	Для подготовки презентации можно воспользоваться ресурсом Prezi, который позволяет создавать различного вида презентации.
Рефлексивно-оценочный	Проведение оценки	Обучающиеся защищают свою работу перед классом (если есть возможность перед параллелью	Возможно составление рекомендаций для	Во время защиты можно воспользоваться приложением Zoom для создания общей

Продолжение табл. 6

Этапы работы над учебным проектом	Этапы работы над учебным проектом	Этапы работы над учебным проектом	Этапы работы над учебным проектом	Этапы работы над учебным проектом
		или на конкурсе проектов), осуществляют устную самооценку, участвуют в коллективном обсуждении. Учитель выступает участником коллективной оценочной деятельности, направляет рефлексивно-оценочную деятельность обучающихся, т.е. проводит беседу по итогам проделанной работы.	дальнейшей работы над расширением этого проекта или же для работы над другими темами.	видеоконференции. С помощью Google Диск можно разместить полученный сборник для других обучающихся. Для рефлексии можно использовать ресурс Mentimeter, который позволяет провести быстрый опрос.

## Примерное наполнение учебного проекта

### ВВЕДЕНИЕ

Алексей Николаевич Крылов говорил: «Рано или поздно всякая правильная математическая идея находит применение в том или ином деле» и он оказался прав в своем высказывании. Математика стала не только орудием количественного расчета, но и методом точного исследования. Без нее с ее развитым логическим и вычислительным аппаратом был бы невозможен прогресс в различных областях человеческой деятельности. Подробнее рассмотрим именно экономическую деятельность. Математика служит средством максимально четкой и понятной формулировки экономических понятий и экономических проблем.

Понятие производной и интеграла изучается в школьной программе в 10-11 классах. Основы экономики(экономика) вводится как факультативное занятие в 9-11 классах по решению школы, предусмотрена Базисным учебным планом РФ для изучения в качестве раздела обществознания или отдельного предмета в 10-11 классах.

Но зачастую, при изучении производной и интеграла, мало времени уделяется их приложениям, что потом отражается в неумении применять их, в нашем случае, в экономических задачах и экономике в целом. Поэтому стоит отметить, что тема представляет теоретический и практический интересы для обучающихся, так как экономический смысл производной и интеграла используется в заданиях ЕГЭ (задача №17), а также в олимпиадах по экономике и обществознанию.

**Цель работы:** составить комплект задач на применение приложения производной и интеграла.

### Задачи:

- 1) изучить литературу по темам «Производная и её экономический смысл», «Интеграл и его экономический смысл»
- 2) изучить рекомендации по решению экономических задач с помощью приложений производной и интеграла;

- 3) рассмотреть и решить экономические задачи, в том числе из ЕГЭ и олимпиад, на применение приложений производной и интеграла;
- 4) составить комплект задач.

**Объект исследования:** производная и интеграл.

**Предмет исследования:** экономический смысл производной и интеграла.

## ГЛАВА 1. ПРОИЗВОДНАЯ И ИНТЕГРАЛ В ЭКОНОМИКЕ

### 1.1. Производная

#### 1.1.1. Понятие производной, экономический смысл

Экономические задачи часто вызывают затруднения при решении, поэтому, для упрощения стали использовать такое понятие, как «производная». В своей работе я по рассмотрела и постаралась доказать, что производная действительно помогает решать различные экономические задачи.

Для начала дадим определение производной.

*Определение:* Производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  называется предел приращения функции  $\Delta f(x_0)$  к приращению аргумента  $\Delta x$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , если этот предел существует и конечен, то он и является производной. Обозначается как:  $f'(x_0)$ . Итак,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Экономисты вместо понятия «предельный», используют понятие «маржинальный» и обозначают символом:  $Mf(x)$  (т.е.  $Mf(x) = f'(x)$ ), т.е. маржинальное значение функции  $f$  в точке  $x$ .

Маржинальные величины в экономике характеризуют не состояние экономического объекта, а его изменение. Из этого следует, что производная выступает как интенсивность изменения некоторого экономического объекта (процесса) по времени или относительно другого исследуемого фактора.

Рассмотрим ситуацию: пусть  $y$  - издержки производства, а  $x$  - количество продукции, тогда  $\Delta x$  - прирост продукции, а  $\Delta y$  - приращение издержек производства. В этом случае производная  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  выражает предельные издержки производства и характеризует дополнительные затраты на производство дополнительной единицы продукции  $MC = \frac{dTC}{dQ}$ , где



$MC$  – предельные издержки (marginal costs);

$TC$  – общие издержки (total costs);

$Q$  – количество.

Другой пример: категория предельной выручки ( $MR$ — marginal revenue) — это дополнительный доход, полученный при переходе от производства  $n$ -ной к  $(n+1)$ -ой единице продукта. Она представляет собой производную от выручки:  $MR = \frac{dR}{dQ}$ . При этом  $R=PQ$ , где  $R$  – выручка (revenue);  $P$  – цена (price).

Таким образом,  $\frac{dPQ}{dQ} = P \Rightarrow MR = P$ .

### *1.1.2 Производная в экономической теории, предельный анализ, эластичность функции*

В экономике часто требуется найти оптимальное значение того или иного показателя: наивысшую производительность труда, максимальную прибыль, выпуск, издержки и т.д., каждый из которых представляет собой функцию одного или нескольких аргументов. Значит, нахождение оптимального значения сводится к нахождению экстремума функции одной или нескольких переменных. Если экономический показатель  $y$  нужно максимизировать или минимизировать, то в оптимальной точке (т.е. точке максимума) приращение функции  $y$  на приращение аргумента  $x$  должно стремиться к нулю, когда приращение аргумента стремится к нулю. В терминах математического анализа это означает, что необходимым условием экстремума функции  $y = f(x)$  является равенство нулю ее производной.

Рассмотрев экономический смысл производной, несложно понять, что большинство базовых законов теории производства и потребления, спроса и предложения оказываются прямыми следствиями математических теорем.

Рассмотрим теоремы и их экономические интерпретации.

*Если дифференцируемая на промежутке функция  $y = f(x)$  достигает наибольшего или наименьшего значения во внутренней точке  $x_0$  этого*

промежутка, то производная функции в этой точке равна нулю, то есть  $f'(x_0) = 0$ .

Один из начальных законов теории производства звучит так: *«Оптимальный для производителя уровень выпуска товара определяется равенством предельных издержек и предельного дохода».*

То есть уровень выпуска  $Q_0$  является оптимальным для производителя, если  $MC(Q_0) = MR(Q_0)$ , где  $MC$  - предельные издержки, а  $MR$  - предельный доход.

Обозначим функцию прибыли за  $P(Q)$ . Тогда  $P(Q) = R(Q) - C(Q)$ , где  $R$  - прибыль, а  $C$  - общие издержки производства.

Очевидно, что оптимальным уровнем производства является тот, при котором прибыль максимальна, то есть такое значение выпуска  $Q_0$ , при котором функция  $P(Q)$  имеет экстремум (максимум). По теореме Ферма в этой точке  $P'(Q) = 0$ . Но  $P'(Q) = R'(Q) - C'(Q)$ , поэтому  $R'(Q_0) = C'(Q_0)$ , откуда следует, что  $MR(Q_0) = MC(Q_0)$ .

Понятие выпуклости функции также находит свою интерпретацию в экономической теории.

Закон убывающей доходности: *«С увеличением производства дополнительная продукция, полученная на каждую новую единицу ресурса (трудового, технологического и т.д.), с некоторого момента убывает».*

Другими словами, величина  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , где  $\Delta y$  - приращение выпуска продукции, а  $\Delta x$  - приращение ресурса, уменьшающееся при увеличении  $x$ . Таким образом, закон убывающей доходности формулируется так: функция  $y = f(x)$ , выражающая зависимость выпуска продукции от вложенного ресурса, является функцией, выпуклой вверх.

Другое важное понятие теории производства - это уровень наиболее экономичного производства, при котором средние издержки по производству товара минимальны. Соответствующий экономический закон гласит:

*«Оптимальный объем производства определяется равенством средних и предельных издержек».*

Получим это условие как следствие сформулированной выше теоремы. Средние издержки  $AC(Q)$  определяются как  $\frac{TC(Q)}{Q}$ , т.е. издержки по производству всего товара, деленные на произведенное его количество. Минимум этой величины достигается в критической точке функции  $y = AC(Q)$ , т.е. при условии  $AC'(Q) = \frac{TC'(Q) \cdot Q - TC(Q)}{Q^2}$  откуда

$$TC'(Q) \cdot Q - TC(Q) = 0 \text{ или } TC'(Q) = \frac{TC(Q)}{Q}, \text{ т.е. } MC(Q) = AC(Q)$$

Другим базисным понятием экономической теории является функция полезности  $U = U(x)$ , где  $x$  - товар, а  $U$  – полезность (utility). Эта величина очень субъективная для каждого отдельного потребителя, но достаточно объективная для общества в целом. Закон убывающей полезности звучит следующим образом: *«С ростом количества товара, дополнительная полезность от каждой новой его единицы с некоторого момента убывает»*. Очевидно, этот закон можно переформулировать так: *функция полезности является функцией, выпуклой вверх*. В таком изложении закон убывающей полезности служит начальной точкой для математического исследования теории спроса и предложения.

Так же в экономике используют предельный анализ – совокупность приемов исследования изменяющихся величин затрат или результатов при изменениях объемов производства, потребления и т.п. на основе анализа их предельных значений. Предельный показатель (показатели) функции ничто иное как её производная (в случае функции одной переменной) или частные производные (в случае нескольких переменных).

В экономике часто используются средние величины: средняя производительность труда, средние издержки, средний доход и т.д. Но часто требуется узнать, на какую величину вырастет результат, если будут

увеличены затраты и наоборот. С помощью средних величин ответ на этот вопрос получить невозможно. В подобных задачах требуется определить предел отношения приростов результата и затрат. Таким образом, для их решения необходимо найти производную в случае функции одной переменной и частных производных, если функция зависит от нескольких аргументов.

Так, например, если задана производственная функция

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n),$$

где  $x_i$  – объем затрачиваемого ресурса ( $i = 1, \dots, n$ ),  $y$  – максимальный объем выпуска, который можно получить, затрачивая ресурсы соответственно в объемах  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ , то предельный эффект от использования  $i$ -го ресурса ( $p_i$ ) определяется следующим образом:

$$p_i = \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i}$$

Здесь величина  $p_i$  равна дополнительному объему выпуска, который получается в результате затраты дополнительной единицы  $\Delta x_i$   $i$ -го ресурса при неизменных объемах остальных ресурсов.

Предельные величины (предельная выручка, полезность, производительность, предельный доход, продукт и др.) характеризуют не состояние, а скорость изменения экономического объекта или процесса во времени или относительно другого исследуемого фактора.

*Эластичностью функции  $y = f(x)$*  называется предел отношения относительных изменений переменных  $x$  и  $y$ .

Если эластичность изменения переменной  $y$  при изменении переменной  $x$  обозначить  $E_x(y)$ , то, используя определение производной получаем:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta y}{y} \right) / \left( \frac{\Delta x}{x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} \right)$$

$$E_x(y) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = f'(x) \cdot \frac{x}{y} = \frac{f'(x)}{\frac{y}{x}} = \frac{f'(x)}{\frac{f(x)}{x}} = \frac{Mf}{Af},$$

Где  $Mf$  – маржинальное значение функции  $f$  в точке  $x$ ,  $Af$  – среднее значение функции  $f$  в точке  $x$ . Эту эластичность также называют предельной или точечной эластичностью.

Т.е. эластичность может быть выражена в виде отношения предельной и средней величин. А так как  $d \ln y = \frac{dy}{y}$ , а  $d \ln x = \frac{dx}{x}$ , то эластичность можно представить в виде «логарифмической производной»  $E_x(y) = \frac{d \ln y}{d \ln x}$ .

## 1.2. Интеграл

### 1.2.1 Понятие интеграла и его экономический смысл

В предыдущем параграфе упоминалось, что под предельным (маржинальным) значением показателя в экономическом анализе принято понимать производную функции этого показателя (если эта функция непрерывна).

В экономике часто приходится находить функции по их известным предельным величинам, т.е. искать саму функцию  $f(x)$ , зная только  $f'(x)$ . Поскольку функция  $f(x)$  является первообразной функции  $f'(x)$ , то нахождение  $f(x)$  связано с интегрированием функции  $f'(x)$ :

$$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

Следовательно, чтобы найти экономическую функцию по ее предельной, необходимо проинтегрировать предельную функцию.

Рассмотрим теперь экономический смысл определенного интеграла.

Пусть функция  $u = f(t)$  описывает изменение производительности некоторого завода с течением времени. Найдём объем продукции  $u$ , произведенной за промежуток времени  $[0; T]$ .

Если предположить, что производительность не изменяется с течением времени (т.е.  $f(t) = \text{const}$ ), то объем продукции  $\Delta u$ , произведенный за некоторый промежуток времени  $[t; t + \Delta t]$ , задается формулой:  $\Delta u = f(t)\Delta t$ . Если  $f(t)$  не является постоянной функцией, то справедливо приближенное

равенство  $\Delta u \approx f(\xi)\Delta t$ , где  $\xi \in [t; t + \Delta t]$ , которое будет точнее тогда, когда меньше  $\Delta t$ .

Значит, для решения таких задач, используем те же приемы, что и при нахождении площади криволинейной трапеции. Разобьем отрезок  $[0; T]$  на промежутки времени точками:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T.$$

Для величины объема продукции  $\Delta u_i$ , произведенной за промежуток времени  $[t_{i-1}; t_i]$ ,  $i=1, \dots, n$  имеем:

$$\Delta u_i \approx f(\xi_i)\Delta t_i \text{ где } \xi_i \in [t_{i-1}; t_i] \text{ и } \Delta t_i = t_i - t_{i-1}.$$

Тогда

$$u = \sum_{i=1}^n \Delta u_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta t_i$$

При  $\max \Delta t_i \rightarrow 0$ , каждое из использованных приближенных равенств становится все более точным, поэтому

$$u = \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta t_i.$$

Учитывая определение определенного интеграла, в итоге получаем

$$u = \int_0^T f(t)dt,$$

т.е. если  $f(t)$  – производительность труда в момент времени  $t$ , то  $\int_0^T f(t)dt$

есть объем выпускаемой продукции за промежуток  $[0; T]$ .

Сравнивая эту задачу с задачей о нахождении площади криволинейной трапеции, получим, что величина объема продукции, произведенной за промежуток времени  $[0; T]$ , численно равна площади фигуры, ограниченной графиком функции  $u = f(t)$ , описывающей изменения производительности труда с течением времени, отрезком  $[0; T]$  и прямыми  $t = 0$ ,  $t = T$ .

### 1.2.2 Применение интеграла в экономической теории

Производственная функция – это функция, показывающая зависимость объема производства от количества используемого труда и капитала. Одной из более известных функций, является функция Кобба-Дугласа:  $f(t) = AK^\alpha(t)L^\beta$ , где  $A$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  – неотрицательные константы,  $K$  – объем фондов либо в стоимостном, либо в натуральном выражении,  $L$  – объем трудовых ресурсов,  $f(t)$  – выпуск продукции в стоимостном, либо в натуральном выражении. Тогда объем выпускаемой продукции за время  $T$  лет составит: если в функции Кобба-Дугласа считать, что затраты труда есть линейная зависимость от времени, а затраты капитала  $e^{\gamma t}$  (чтобы поддерживать равновесие между объемом производства выпускаемой продукции и спросом на нее, скорость денежного потока должна расти со скоростью экспоненты), то она примет вид

$$f(t) = (\alpha t + \beta) \cdot e^{\gamma t}.$$

Тогда объем выпускаемой продукции за время  $T$  лет составит:

$$Q = \int_0^T (\alpha t + \beta) \cdot e^{\gamma t} dt.$$

*Среднее время изготовления изделия.*

Пусть известна функция  $t = t(x)$ , описывающая изменение затрат времени  $t$  на изготовления изделия, где  $x$  – порядковый номер изделия в партии. Тогда среднее время  $t_{cp}$ , затраченное на изготовление одного изделия в период от  $x_1$  до  $x_2$  изделий вычисляется по теореме о среднем:

$$t_{cp} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t(x) dx \quad (1)$$

Функция изменения затрат времени на изготовление изделий  $t = t(x)$  очень часто имеет вид:  $t = ax^{-b}$ , где  $a$  – затраты времени на первое изделие,  $b$  – показатель производственного процесса.

*Кривая Лоренца. Вычисление коэффициента Джини*

Кривая Лоренца (рис. 1) – это кривая, отражающая накопленные доли дохода населения.



Рис. 1. Кривая Лоренца

Прямая  $MN$  называется линией равномерного распределения доходов. Это гипотетическая линия, которая показывает, что было бы, если бы доходы в экономике распределялись равномерно. Кривая Лоренца позволяет судить о степени неравенства доходов в экономике по ее изгибу. Для количественного измерения степени неравенства дохода по кривой Лоренца существует специальный коэффициент – коэффициент Джини, который равен отношению площади фигуры, ограниченной прямой абсолютного равенства и кривой Лоренца, к площади всего треугольника  $MNE$ :

$$k = \frac{S(A)}{S(MNE)}$$

Чем выше неравенство в распределении доходов, тем больше коэффициент  $k$  приближается к единице (абсолютное неравенство). И чем выше равенство в распределении доходов, тем меньше данный коэффициент. При абсолютном равенстве он достигает нуля.



## ГЛАВА 2. ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ПРИМЕНЕНИЕ ПРИЛОЖЕНИЙ ПРОИЗВОДНОЙ И ИНТЕГРАЛА

В данной главе будут рассмотрены основные типы задач, олимпиадные задания и их решения. К каждому типу будут предложены задачи для самостоятельного решения. Используются материалы из задачников, олимпиадных работ и заданий ЕГЭ предыдущих лет.

### 2.1. Применение приложений производной

Главной идеей данных задач является выявление функции, производную которой нужно найти (задачи на производительность).

*Задача №1.* Общий продукт труда определяется формулой:

$$TP_L(L) = 10L^{\frac{1}{2}}$$

Определите производительность труда шестнадцати единиц труда.

*Решение:* Производительность труда определяется предельным продуктом труда, а предельный продукт – это производная от  $TP_L$

$$MP_L = (TP_L)' = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$$

*Ответ:* 5 ед.

*Задача №2.* Функция общих затрат фирмы имеет вид

$$TC = 200Q - 5Q^3.$$

Определить величину предельных затрат фирмы при  $Q = 6$  единиц.

*Решение:* Предельные издержки – это производная от общих затрат.  $MC = 200 - 5 \cdot 3Q = 200 - 15Q$ , поскольку  $Q = 6$ , то  $MC = 200 - 90 = 110$ .

*Ответ:*  $MC = 110$

*Задача №3.* Функция общих издержек фирмы имеет вид  $TC = 50Q - Q^2$ . Эта фирма реализует продукцию на рынке совершенной конкуренции по цене 80 руб. Подсчитайте, какую она получает прибыль?

*Решение:* Находим  $MC$ .  $MC = (TC)' = 50 - 2Q$ . Поскольку товар реализуется на совершенно конкурентном рынке,  $MR = P$ . Тогда  $MC = P$ . Подставим значения:  $50 - 2Q = 80$ ,  $Q = 15$ . Определим общую выручку при продаже 15 ед. продукции:

$TR = 15 \cdot 80 = 1200$  руб. Общие затраты будут равны:  $TC = 15 \cdot 15 + (15)^2 = 450$  руб. Отсюда прибыль равна  $1200 - 450 = 750$  руб.

Ответ: 750 руб.

**Задача №4.** Вычислить производительность труда во время каждого часа работы (6-ти часовой рабочий день), при условии, что объем продукции  $y$  в течение рабочего дня представляет функцией  $y = -t^3 + 5t^2 + 60t - 17$ , где  $t$  – время в часах.

**Решение:** 1) Найдем производную:  $y'(t) = -3t^2 + 10t + 60$

2) Найдем значение производной в течение каждого часа:

$$y'(1) = -3 + 10 + 60 = 67$$

$$y'(2) = -12 + 20 + 60 = 68$$

$$y'(3) = -27 + 30 + 60 = 63$$

$$y'(4) = -48 + 40 + 60 = 52$$

$$y'(5) = -75 + 50 + 60 = 35$$

$$y'(6) = -108 + 60 + 60 = 12$$

**Задача №5.** Объем продукции  $u$  цеха в течение рабочего дня представляет функцию  $u = -t^4 - 6t^2 + 190t + 425$ , где  $t$  – время (ч). Найти производительность труда через 3 часа после начала работы.

**Решение:** За период времени  $[3; t_0 + \Delta t]$  количество произведенной продукции изменится от  $u_0 = u(t_0)$  до значения  $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$ . Средняя производительность труда за этот период времени составит  $\frac{\Delta u}{\Delta t}$ .

Следовательно, производительность труда в момент  $t_0$  можно определить, как предельное значение средней производительности труда за период времени  $[t_0; t_0 + \Delta t]$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ , то есть  $ПТ = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = u'(t)$

$$u'(t) = -4t^3 - 12t + 190 \Rightarrow u'(t_0) = -4 \cdot 3^3 - 12 \cdot 3 + 190 = -108 - 36 + 190 = 46$$

Итак, производительность труда в момент времени через 3 часа после начала работы составит 46 единиц продукции в час.

Ответ: 46 единиц

*Задача №6.* Пусть функция затрат при производстве апатитового концентрата имеет вид:  $K(x) = 2x + \sqrt{x-1}$ . Определить предельные издержки производства при увеличении объёма выпуска на  $x_1 = 5$  ед. и на  $x_2 = 17$  ед.

*Решение:* Предельные издержки - это рост затрат при увеличении объёма производства на 5 ед. и на 17 ед. Но предельные издержки — это ещё и значение производной функции в точке.

$$K'(x) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{x-1}};$$

$$K'(5) = 2,25, K'(17) = 2,125$$

Следовательно, предельные издержки производства составляют 2,25 ден. ед. при росте объёма производства на 5 ед. и 2,125 при росте объёмов производства на 17 ед.

*Ответ:* 2,25 ден. ед., 2,125 ден. ед.

Следующий тип задач на нахождение экстремума функции.

Алгоритм решения задачи

на определение наибольшего или наименьшего значений:

Этап построения математической модели (этап формализации).

1. Выявляем оптимизируемую величину (прибыль, расходы на производство и т.п.) и обозначаем её  $y$ ;

2. Одну из неизвестных величин (цену товара, величину спроса, объём производства и т.п.) считаем независимой переменной и обозначаем  $x$ . Устанавливаем реальные границы изменения  $x$  в соответствии с условием задачи;

3. Исходя из конкретных условий задачи, выражаем  $y$  через  $x$  и известные величины.

Этап исследования математической модели.

1. Для полученной функции находим максимум или минимум (в зависимости от требований задачи) на промежутке реального изменения  $x$ .

Этап интерпретации результатов.

1. Интерпретируем полученные результаты для данных задачи.

Данный алгоритм подходит и для функции с двумя переменными.

*Задача №7.* Функция спроса имеет вид  $Q_D = 100 - 25p$ , постоянные издержки TFC (total fixed costs) составляют 30 денежных единиц, а переменные издержки TVC (total variable costs) на производство единицы продукции – 2 денежных единицы. Найти объем выпуска, максимизирующий прибыль монополиста.

*Решение:* Прибыль есть выручка минус издержки:  $\Pi = TR - TC$ , где  $TR = p \cdot Q$ ;  $TC = TFC + TVC$ . Найдём цену единицы продукции:  $25p = 100 - Q \Rightarrow p = 4 - \frac{Q}{25}$ . Тогда  $\Pi = (4 - \frac{Q}{25}) \cdot Q - (30 + 2Q) = -Q^2 + 50Q - 750 \rightarrow \max$ . Найдём производную:  $\Pi'(Q) = -2Q + 50$ . Приравняем производную к нулю:

$$-2Q + 50 = 0 \Rightarrow Q = 25.$$

При переходе через точку  $Q = 25$  функция  $\Pi(Q)$  меняет свой знак с плюса на минус, следовательно, эта точка является точкой максимума, и в ней функция прибыли достигает своего максимального значения. Таким образом, объем выпуска, максимизирующий прибыль, равен 25 единицам продукции.

*Ответ:* 25 единиц продукции

*Задача №8:* Есть ли оптимальный объем производства фирмы, функция прибыли которой задана таким образом:  $\Pi(q) = TR(q) - TC(q) = q^2 - 10q + 12$ .

*Решение:* Найдём производную данной функции:

$$\Pi' = TR'(q) - TC'(q) = 2q - 10$$

Приравняем производную к нулю и найдём точку экстремума:

$$\Pi' = 2q - 10 = 0 \Rightarrow q = 5$$

Является ли объем выпуска, равный пяти единицам продукции, оптимальным для фирмы? Чтобы ответить на этот вопрос, надо проанализировать характер изменения знака производной при переходе через точку экстремума.

При  $q < q = 5$   $\Pi'(q) < 0$  и прибыль убывает.

При  $q > q = 5$   $\Pi'(q) > 0$  и прибыль возрастает.

Как видим, при переходе через точку экстремума производная меняет свой знак с минуса на плюс. Следовательно, в точке экстремума  $q = 5$  прибыль принимает минимальное значение, и таким образом, этот объём производства не является оптимальным для фирмы.

*Ответ:* 18 единиц продукции

*Задача №9.* Оборот предприятия за истекший год описывается через функцию  $U(t) = 0,15t^3 - 2t^2 + 342$ , где  $t$  – месяцы,  $U$  – миллионы. Исследуйте оборот предприятия.

*Решение.* Исследуем оборот предприятия с помощью производных:  $U'(t) = 0,45t^2 - 4t$ ,  $U''(t) = 0,9t - 4$ ,  $U'''(t) = 0,9$ . Момент наименьшего оборота при  $U'(t) = 0$ , т.е. при  $t \approx 8,9$  ( $t$ -точка минимума). Значит наименьший оборот был на 9 месяце. Первая производная показывает экстремальное значение оборота. Из  $U''(t) = 0$  следует  $t \approx 4,4$ . А так как  $U''' > 0$ , то на пятом месяце имеется сильное снижение оборота.

Точки перегиба важны в экономике, так как именно по ним можно определить, в какой конкретно момент произошло изменение.

Так, например, по решению данной задачи можно сделать выводы:

1. В начале исследуемого периода у предприятия было снижение оборота;
2. Предприятие пыталось выйти из этого состояния и для этого использовало определенные средства.

На пятом месяце (точка перегиба) что-то было предпринято и предприятие стало выходить из кризиса, а на девятом месяце стало набирать обороты.

*Задачи для самостоятельного решения.*

*Задача №10:* Затраты на производство продукции объёма  $x$  задаются функцией  $C(x) = x^2 + 5x + 4$ . Производитель реализует продукцию по цене 25 ден.ед. Найдите максимальную прибыль  $\Pi$  и соответствующий объём продукции  $x$ .

*Задача №11:* Функция спроса на продукцию фирмы-монополиста имеет вид:  $Q_d = 295 - 13p$ , где  $p$  – цена продукции в д.е. Функция общих издержек:  $TC(q) = 23q^2 + 17$ . Правительство вводит паушальный налог (не зависящая от объёмов производства фиксированная выплата) на продукцию монополиста в размере 57 д.е. Как изменится выпуск монополиста в результате введения налога?

*Задача №12:* Функция издержек производства имеет вид:  $y(x) = 0,1x^3 - 1,2x^2 + 5x + 250$  ден. единиц. Найти предельные издержки производства и вычислить их значения при  $x=10$

*Задача №13:* Функция издержек производства  $y$  от объема выпускаемой продукции  $x$  имеет вид:  $y = 100x - 0,2x^3$ . Определить предельные издержки при объеме продукции 10 единиц.

*Задача №14:* Производительность труда бригады может быть описана уравнением  $y = -2,5t^2 + 15t + 100$ , где  $0 \leq t \leq 8$  – рабочее время в часах. Вычислить скорость и темп изменения производительности труда при  $t=2$  и  $t=7$ .

## 2.2 Применение приложений интеграла

Задачи данного типа сводятся к нахождению экономической функции (первообразной) по данной функции предельных величин (производной)

*Задача №15.* Найти выигрыши потребителей и поставщиков в предложении установления рыночного равновесия, если законы спроса и предложения имеют вид:  $p = 250 - x^2$ ,  $p = \frac{1}{3}x + 20$

*Решение:* Решая систему

$$\begin{cases} p = 250 - x^2, \\ p = \frac{1}{3}x + 20 \end{cases}$$

Найдем точку рыночного равновесия:  $x_0 = 15$ ,  $p_0 = 25$

$$C = \int_0^{15} (250 - x^2) dx - 15 \cdot 25 = 250x \Big|_0^{15} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^{15} - 375 = 2250$$

$$P = 15 \cdot 25 - \int_0^{15} \left(\frac{1}{3}x + 20\right)dx = 375 - 20x \Big|_0^{15} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{15} = 37,5$$

Ответ:  $C = 2250$ ,  $P = 37,5$

**Задача №16.** Определить объем выпуска продукции за первые пять часов работы при производительности  $f(t) = 11,3e^{-0,417t}$ , где  $t$  – время в часах

**Решение:** По формуле  $Q(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$  получаем:

$$Q(0, 5) = \int_0^5 (11,3e^{-0,417t})dt = 40$$

Ответ: 40

**Задача №17.** Уравнение спроса на некоторый товар имеет вид

$p = 134 - x^2$ . Найти выигрыш потребителей, если равновесная цена равна 70.

**Решение:** Величина денежных средств  $C = \int_0^{x_0} f(x)dx - p_0x_0$  сберегается потребителями, если предполагать продажу товара по равновесной цене  $p_0$ , поэтому  $C$  называется выигрышем потребителей.

$$C = \int_0^{x_0} (134 - x^2)dx - 70x_0 = 64x_0 - \frac{x^3}{3}$$

$$C = 64(-16) + 1365,3 = 341,3$$

Ответ:  $C = 341,3$

*Задачи для самостоятельного решения.*

**Задача №18.** Найти объем произведенной продукции за время  $t=6$  час, если производительность труда задана функцией:  $f(t) = -t^2 + 10t$ .

**Задача №19.** Найти объем продукции, произведенной за 5 лет, если функция Коба-Дугласа имеет вид:  $f(t) = (1+t)e^{2t}$

**Задача №20.** Найти выигрыши потребителей и поставщиков в предложении установления рыночного равновесия, если законы спроса и предложения имеют вид:  $p = 186 - x^{20}$ ,  $p = 20 + \frac{11}{6}x$

**Задача №21.** Уравнение спроса на некоторый товар имеет вид  $p = \frac{100}{x+15}$

. Найти выигрыш потребителей, если равновесное количество товара равно 10.

*Задача №22.* Задана функция предельных издержек  $f = 2x^2 - 2x + 90$ . Найти функцию издержек  $F = F(x)$  и вычислить издержки на изготовление 15 ед. товара.

### 2.3 Примеры экономических задач из ЕГЭ

Решение задач в ЕГЭ сводится к выявлению функции, производную которой нужно найти, для того, чтобы выяснить наибольшее/наименьшее значение.

*Задача №23.* Пенсионный фонд владеет акциями, цена которых к концу года  $t$  становится равной  $t^2$  тыс. руб. (т. е. к концу первого года они стоят 1 тыс. руб., к концу второго — 4 тыс. руб. и т. д.), в течение 20 лет. В конце любого года можно продать акции по их рыночной цене на конец года и положить вырученные деньги в банк под 25% годовых. В конце какого года нужно продать акции, чтобы прибыль была максимальной?

*Решение:* Пусть сумма положена в банк на оставшиеся  $20-t$  лет под 25% годовых. Тогда цена акций на конец срока составит:  $s(t) = t^2 \cdot 1,25^{20-t}$  тыс. рублей. Найдём наибольшее значение полученной функции на множестве натуральных  $t$ , не превосходящих 20. Получим:

$$s'(t) = 2t \cdot 1,25^{20-t} + t^2 \cdot 1,25^{20-t} \ln 1,25 \cdot (-1) = 1,25^{20-t} t(2 - t \ln 1,25)$$

Найденная производная обращается в нуль в точке  $\frac{2}{\ln 1,25} = 2 \log_{1,25} e$  и меняет в ней знак с плюса на минус. Значит, это точка максимума. Стоит заметить, что  $\left(\frac{5}{4}\right)^4 < e < \left(\frac{5}{4}\right)^5 \Leftrightarrow \log_{1,25} e < \log_{1,25} \left(\frac{5}{4}\right)^5 \Leftrightarrow \log_{1,25} e < 5 \Leftrightarrow 8 < 2 \log_{1,25} e < 10$

Из полученной оценки следует, что точка максимума лежит на интервале  $(8; 10)$ . Сравним значения функции в точках 8, 9, 10. Так как,

$$\frac{s(9)}{s(8)} = \frac{81 \cdot 1,25^{11}}{64 \cdot 1,25^{12}} = \frac{81 \cdot 4}{64 \cdot 5} = \frac{324}{320} > 1$$

$$\frac{s(9)}{s(8)} = \frac{81 \cdot 1,25^{11}}{100 \cdot 1,25^{10}} = \frac{81 \cdot 5}{100 \cdot 4} = \frac{405}{400} > 1,$$



наибольшее значение функции на множестве натуральных аргументов достигается в точке 9, то продавать акции необходимо в конце 9 года.

*Ответ: в конце девятого года.*

**Задача №24.** Максим приобрел помещение в центре города с целью открыть гостиницу. В гостинице могут быть расположены стандартные номера, каждый из которых занимает  $21 \text{ м}^2$  и номера «люкс» площадью  $49 \text{ м}^2$ . По планировке, под номера можно отвести площадь  $1099 \text{ м}^2$ . У Максима есть возможность разместить любые номера на этой площади. Стоимость обычного номера 2000 рублей в сутки, а номера «люкс» 4500 рублей в сутки. Какую наибольшую прибыль принесет гостиница Максиму за сутки?

**Решение:** Пусть  $x$  – количество стандартных номеров,  $y$  – количество номеров «люкс». Они занимают площадь  $21x + 49y$ . Составим равенство:  $21x + 49y = 1099$ . Выразим из этого равенства  $y = \frac{-21x + 1099}{49}$ . Составим функцию заработанных денег:  $S(x, y) = 2000x + 4500y$ . Далее подставим в эту функцию выражение для  $y$ . Получим  $S(x) = 71\frac{3}{7}x + 4500 \cdot 22\frac{3}{7}$ . Это возрастающая линейная функция. Свое наибольшее значение она принимает при наибольшем значении  $x$  и наименьшем значении  $y$ . По условию  $x$  и  $y$  – натуральные числа. Значит,  $y = 1$  (это наименьшее натуральное число) и  $x = 50$ . Значит,  $S(50, 1) = 2000 \cdot 50 + 4500 \cdot 1 = 104500$ .

*Ответ: 104500 рублей.*

**Задача №25.** Во владении Анатолия имеется два завода, которые занимаются изготовлением одинаковых товаров. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно  $t^2$  часов в неделю, то производят  $t$  единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Анатолий платит рабочему 500 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе – 300 рублей. Анатолий готов выделять 1200000 рублей на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

*Решение:* Предположим, что в первом городе на заводе рабочие трудятся  $x^2$  часов, а во втором городе  $y^2$  часов. Тогда в неделю будет произведено  $x+y$  единиц товара при затратах на оплату труда  $500x^2 + 300y^2$  рублей.

Найдем наибольшее значение выражения  $Q = x + y$  при условии  $500x^2 + 300y^2 = 1200000$ . Выразим отсюда  $y$ :  $y = \sqrt{4000 - \frac{5}{3}x^2}$ . Подставим в  $Q$ :

$$Q(x) = x + \sqrt{4000 - \frac{5}{3}x^2}.$$

Решим подкоренное уравнение и получим  $x_{1,2} = \pm 20\sqrt{6}$ . Условию удовлетворяет  $x_1 = 20\sqrt{6}$ . Поэтому, найдем наибольшее значение функции  $Q(x)$  на отрезке  $[0; 20\sqrt{6}]$ .

$$Q'(x) = 1 - \frac{5x}{3 \cdot \sqrt{4000 - \frac{5}{3}x^2}} \text{ при } x \neq 20\sqrt{6}. \text{ Из уравнения } Q'(x) = 0 \text{ получаем:}$$

$$3 \cdot \sqrt{4000 - \frac{5}{3}x^2} = 5x, \quad x^2 = 900 \Rightarrow x = 30. \quad \text{Точка } x=30 \text{ — единственная}$$

критическая точка функции на отрезке  $[0; 20\sqrt{6}]$ . Сравнивая значения  $Q(30) = 80, Q(20\sqrt{6}) = 20\sqrt{6}, Q(0) = 20\sqrt{10}$ , получаем, что наибольшее значение функции равно 80, а значит и наибольшее количество единиц товара равно 80.

*Ответ:* 80

*Задача №26.* Некоторая фирма изготавливает и продает приборы для строительства. Удельные расходы (в расчете на один прибор) зависят от объема производства и включают в себя постоянную часть в размере 1000 (руб/прибор) и переменную часть  $2n$  (руб/прибор), где  $n$  — число приборов, изготовленных за месяц. Цена прибора, в свою очередь, зависит от объема производства по закону  $P(n) = 10000 - n$  (руб/прибор). Определить, при каком объеме производства прибыль будет максимальной?

*Решение:* Доход от продажи приборов, изготовленных в течение месяца равен:  $R(n) = nP(n) = n(10000 - n)$ . Месячные расходы при этом составляют:  $C(n) = n(1000 + 2n)$ . Тогда прибыль определяется формулой:

$$P(n) = R(n) - C(n) = n(10000 - n) - n(1000 + 2n) = 10000n - n^2 - 1000n - 2n^2 = 9000n - 3n^2$$

Исследуем функцию на экстремум ( $n$  – действительное число). Найдем производную и получим:

$$P'(n) = (9000n - 3n^2)' = 9000 - 6n, \quad 9000 - 6n = 0 \Rightarrow n = \frac{9000}{6} = 1500.$$

Вычислим вторую производную:  $P''(x) = (9000 - 6n)' = -6 < 0$ . Так как вторая производная всюду отрицательна, то решение  $n=1500$  является точкой максимума, то есть при производстве 1500 приборов в месяц прибыль предприятия будет максимальной.

*Ответ: 1500*

*Задача №27.* Для того чтобы изготовить  $x$  единиц товара Леонид затрачивает  $C(x) = ax^2 + bx$  рублей, где  $a, b$  – некоторые действительные числа. Стоимость товара на рынке  $m$  рублей за штуку. Рассчитайте объем продаж, при котором прибыль будет наибольшей.

*Решение:* При продаже  $x$  единиц товара Леонид получает доход равный:  $R(x) = mx$ . Следовательно, прибыль Леонида составляет:  $P(x) = R(x) - C(x) = mx - (ax^2 + bx) = (m - b)x - ax^2$ . Найдем производную функции:  $P'(x) = ((m - b)x - ax^2)' = m - b - 2ax$ . Приравняем производную к нулю и получим:  $P'(x) = 0 \Rightarrow m - b - 2ax = 0 \Rightarrow 2ax = m - b \Rightarrow x = \frac{m - b}{2a}$ . Рассмотрим вторую производную:  $P''(x) = (m - b - 2ax)' = -2a < 0$ . Так как вторая производная отрицательна, то точка  $x = \frac{m - b}{2a}$  является точкой максимума, т.е. при данном объеме продаж прибыль Леонида будет наибольшей.

*Ответ:  $x = \frac{m - b}{2a}$*

*Задачи для самостоятельного решения.*

*Задача №28.* Во владении некоторого акционерного фонда есть ценные бумаги, которые стоят  $t^2$  тыс. рублей в конце года  $t$  ( $t = 1, 2, \dots$ ). Акционеры в конце года имеют возможность продать ценные бумаги и открыть денежный вклад в банке, на котором в конце каждого года сумма будет увеличиваться в  $(1+r)$  раз. Акционер хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце 25 года сумма на его счёте была наибольшей. Расчёты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце 21 года. При каких положительных значениях  $r$  это возможно?

*Задача №29.* Алексей владеет двумя заводами, которые занимаются производством одинаковой продукции, но расположены в разных городах. Во втором городе используют более современное оборудование, в результате чего рабочие трудятся суммарно  $t^3$  часов в неделю и производят  $t$  приборов. А рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно  $4t^3$  часов в неделю, то за эту неделю они производят  $t$  приборов. За каждый час работы (на каждом из заводов) Алексей платит рабочему 1 тысячу рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 20 приборов. Какую наименьшую сумму придется тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

#### 2.4. Примеры олимпиадных задач

*Задача №30.* Функция спроса на продукт монополиста  $Q = 12 - P$ , а функция общих издержек  $TC = 2 + 6Q + Q^2$ . При какой цене прибыль монополиста будет максимальной?

*Решение:* Условием максимизации прибыли монополиста является  $MC=MR$ . Мы знаем, что  $MC = TC'$ , значит  $MC = 6 + 2Q$ . Найдём общий доход, для этого выразим цену:  $P = 12 - Q$ . Получим:

$$TR = P \cdot Q = (12 - Q) \cdot Q = 12Q - Q^2$$

Дальше заметим, что  $MR = TR' = 12 - 2Q$ . Теперь решим равенство  $MC=MR$ .

$$6 + 2Q = 12 - 2Q \rightarrow 4Q = 6 \rightarrow Q = 1,5$$

Найдем цену  $P = 12 - 1,5 = 10,5$ .

*Ответ: 10,5 ден.единиц*

**Задача №31.** Некоторая компания вычисляет свою прибыль на рынке совершенной конкуренции с помощью функции, которая имеет следующий вид:  $\pi(Q) = -6Q + 4Q^2 - Q^3$ , где  $\pi$  — прибыль,  $Q > 0$  — объем выпуска. По условию договора, компания не может произвести больше 10 единиц продукции. При каком объеме выпуска прибыль максимальна?

**Решение:** Найдем производную  $\pi' = -6 + 8Q - 3Q^2$ . Далее приравняем производную к нулю и решим квадратное уравнение. Получим, что  $D < 0$ , а это означает, что и сама производная принимает только отрицательные значения. Отсюда, можно сделать вывод, что функция прибыли всегда убывает. Значит, оптимальный выпуск  $Q=0$ .

*Ответ:  $Q=0$*

**Задача №32.** В некоторой республике используется прогрессивная система налогообложения. Сумма налога состоит из линейной части, пропорциональной доходу, и нелинейной части, зависящей от дохода по степенному закону. Общая величина налога определяется формулой  $T(W) = aW + (bW + c)^p$ , где  $W$  — доход,  $p$  — показатель степени,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — положительные коэффициенты. При каком уровне дохода ставка налога будет минимальной?

**Справка:** Налоговая ставка  $r$  вычисляется по формуле  $r(W) = \frac{T(W)}{W}$

**Решение:** Вычислим налоговую ставку:

$$r(W) = \frac{T(W)}{W} = \frac{aW + (bW + c)^p}{W} = a + \frac{(bW + c)^p}{W}.$$

Исследуем данную функцию на экстремум. Найдем производную и приравняем ее к нулю.

$$r'(W) = \left( a + \frac{(bW + c)^p}{W} \right)' = \frac{p(bW + c)^{p-1} \cdot W - (bW + c)^p \cdot 1}{W^2} = \frac{(bW + c)^{p-1} [pW - (bW + c)]}{W^2} = \frac{(bW + c)^{p-1} [(p-b)W - c]}{W^2}$$

Очевидно, что функция  $r(W)$  имеет три критических точки, но поскольку коэффициенты  $b, c > 0$ , то решение существует лишь в следующей точке:

$(p-b)W - c = 0, \Rightarrow W = \frac{c}{p-b}$ . При переходе через это значение производная

меняет знак с минуса на плюс, а это означает, что здесь функция  $r(W)$  достигает минимума, т.е. налоговая ставка при этом уровне дохода будет наименьшей.

$$\text{Ответ: } W = \frac{c}{p-b}$$

**Задача №33.** На швейной фабрике имеется 164 м ткани. Для того, чтобы сшить одну сорочку необходимо 4 м ткани, а для одного халата 3 м. Сколько следует изготовить сорочек и халатов для получения наибольшей прибыли от продажи вещей, если сорочка стоит 7 руб., а халат 6 руб.? Известно, что сорочек требуется изготовить не менее 14 шт.

**Решение:** Пусть  $x$  – количество сорочек,  $y$  – количество халатов. Тогда  $x \in [14; 41], y \in [0; 54]$  и решение задачи сводится к нахождению максимального значения функции от двух переменных  $F(x, y) = 7x + 6y$ .

$$\begin{cases} F(x, y) = 7x + 6y \\ 4x + 3y = 164 \\ x \geq 14 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Выразим  $y$  через  $x$ :  $y = \frac{164}{3} - \frac{4x}{3}$  и перейдем к функции с одной переменной.

$$F(x) = 7x + 6\left(\frac{164}{3} - \frac{4x}{3}\right) = 7x + \frac{984}{3} - \frac{24x}{3} = 7x + 328 - 8x = 328 - x.$$

Найдем производную функции:  $F'(x) = (328 - x)' = -1 < 0$  значит, функция убывает на всей своей области определения и *max* значение она достигает при  $x_{\min} = 14$ .  $4x + 3y = 164$  при  $x = 14, y = 36$ . Значит, следует изготовить 14-халатов и 36-пижам.

**Ответ:** 14 сорочек, 36 халатов.

**Задача №34.** По стандартам на журнальной странице напечатанный текст должен занимать (вместе с промежутками между строк)  $192 \text{ см}^2$ .

Требования к занимаемому месту для верхнего и нижнего поля – 4 см, для левого и правого – по 3 см. Определите самые выгодные размеры страницы для того, чтобы появилась возможность экономии бумаги.

**Решение.** Так как в условии идет речь об экономии, то необходимо найти такие размеры прямоугольного листа, чтобы его площадь стала минимальной, т.е. нужно составить функцию для нахождения площади страницы. Поскольку по условию мы имеем размеры полей и знаем площадь области печати, то можем установить, что размеры этой области могут быть произвольными.

Обозначим за  $x$  ширину области печати. Тогда высота области печати:  $\frac{192}{x} \text{ см}$ .

Учитывая заданные значения полей, найдем ширину листа:

$l = x + 3 + 3 = (x + 6) \text{ см}$ . Так же найдем высоту:  $h = \frac{192}{x} + 4 + 4 = (\frac{192}{x} + 8) \text{ см}$ . Составим

функцию площади листа.

$s(x) = l \cdot h = (x + 6) \cdot (\frac{192}{x} + 8) = 192 + \frac{6 \cdot 192}{x} + 8x + 48 = 240 + 8x + \frac{6 \cdot 192}{x}$ . Найдем

производную этой функции:  $s'(x) = (240 + 8x + \frac{6 \cdot 192}{x})' = \frac{8(x^2 - 144)}{x^2}$ . Найдем

критические точки и получим  $x_{1,2} = \pm 12$ . Точка  $x = -12$  не удовлетворяет условию. Найдем вторую производную и значение в точке  $x = 12$ .

$$s''(x) = (8 - \frac{6 \cdot 192}{x^2})' = \frac{2 \cdot 6 \cdot 192}{x^3}, \quad s''(12) = \frac{2 \cdot 6 \cdot 192}{12^3} > 0 \text{ (Значение в точке}$$

считать не обязательно). Отсюда, получим что в точке  $x = 12$  функция достигает своего минимума. Таким образом, размеры оптимального листа:

$$l = (x + 6) = (12 + 6) = 18 \text{ см}, \quad h = (\frac{192}{x} + 8) = (\frac{192}{12} + 8) = 16 + 8 = 24 \text{ см}.$$

При этом минимальная площадь равна:  $S_{\min} = s(12) = l \cdot h = 18 \cdot 24 = 432 \text{ см}^2$

**Ответ:**  $l = 18 \text{ см}, h = 24 \text{ см}, S = 432 \text{ см}^2$

**Задача №35.** Какими должны быть размеры открытого бассейна объемом  $V = 32 \text{ м}^3$ , на облицовку стен и дна которого уйдет наименьшее

количество материала? Бассейн имеет форму прямоугольного параллелепипеда.

*Решение:* Требуется найти такие размеры бассейна, чтобы на облицовку его поверхности ушло наименьшее количество материала (например, плитки). Из чего следует, что нам нужно составить функцию суммарной площади дна и 4 стен. За  $x$  обозначим сторону квадрата, тогда  $S=x^2$ ,  $h$  – высота стены и ее площадь  $S=hx$ . Объем прямоугольного параллелепипеда равен:  $V=x^2h$ . Тогда  $x^2h=32 \Rightarrow h=\frac{32}{x^2}$ . Составим функцию суммарной площади дна и четырёх одинаковых стен бассейна:

$s(x) = x^2 + 4xh = x^2 + 4x \cdot \frac{32}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x}$ . Найдем производную функции и её критические точки:  $s'(x) = (x^2 + \frac{128}{x})' = 2x - \frac{128}{x^2} = \frac{2(x^3 - 64)}{x^2}$ .  $\frac{2(x^3 - 64)}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 4$  – критическая точка. Найдем вторую производную и значение в критической точке:  $s''(x) = (2x - \frac{128}{x^2})' = 2 + \frac{128 \cdot 2}{x^3}$ ,  $s''(4) = 2 + \frac{128 \cdot 2}{64} = 2 + 4 = 6 > 0$ , значит функция достигает своего минимума в точке  $x=4$ . Таким образом, сторона оптимального значения  $x=4$ , глубина  $h = \frac{500}{\pi r^2} = \frac{500}{\pi (5 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}})^2} = \frac{500 \cdot \sqrt[3]{\pi^2}}{\pi \cdot 25 \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{20}{\sqrt[3]{4\pi}}$ . При этом минимальная площадь облицовки равна:

$$S_{\min} = S(4) = 4^2 + \frac{128}{4} = 16 + 32 = 48 \text{ м}^2.$$

*Ответ:* сторона  $x=4\text{м}$ , глубина  $h=2\text{м}$ , минимальная площадь облицовки  $S=48\text{м}^2$

**Задача №36.** Определите наименьший размер цилиндрической банки объёмом 0,5 л., так чтобы на её изготовление ушло меньшее количество материала.

*Решение.* Составим функцию площади полной поверхности цилиндра  $s(r)$ , зависящую от его радиуса. Пусть  $r$  см – радиус дна (и крышки) консервной банки. Тогда площадь дна:  $S_{\text{кр}} = \pi \cdot r^2 \text{ см}^2$ . Столько же и площадь



крышки. По условию объем консервной банки равен  $0,5\text{ л} = 500\text{ см}^3$ .

$V = \pi \cdot r^2 h = 500 \Rightarrow h = \frac{500}{\pi r^2} \text{ см}$ . Выразим через  $r$  площадь боковой поверхности

банки:  $S_{\text{бок}} = 2\pi r h = 2\pi r \cdot \frac{500}{\pi r^2} = \frac{1000}{r} \text{ см}^2$ . Площадь полной поверхности банки

равна сумме площадей дна, крышки и боковой поверхности:

$s(r) = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r^2 + \frac{1000}{r} = 2\pi \cdot r^2 + \frac{1000}{r}$ . Найдем критические точки, для этого

найдем производную и приравняем ее к нулю.

$$s'(r) = (2\pi \cdot r^2 + \frac{1000}{r})' = 2\pi \cdot 2r - \frac{1000}{r^2} = \frac{4(\pi \cdot r^3 - 250)}{r^2} = 0. \quad r^3 = \frac{250}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} = 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}} -$$

критическая точка. Проверим выполнение достаточного условия экстремума:

$$s''(r) = (4\pi \cdot r - \frac{1000}{r^2})' = 4\pi + \frac{1000 \cdot 3}{r^3}. \quad s''(5 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}) = 4\pi + \frac{1000 \cdot 3}{\frac{250}{\pi}} = 4\pi + 12\pi = 16\pi > 0. \text{ Значит}$$

функция достигает минимума в точке  $r = 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$ . Высота оптимальной банки :

$$x = 14, y = 36.$$

$$\text{Ответ: } r = 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}} \text{ см} \approx 4,3, \quad h = \frac{20}{\sqrt[3]{4\pi}} \approx 8,6 \text{ см}$$

*Задачи для самостоятельного решения.*

*Задача №37.* Прямоугольный лист картона имеет размеры  $8 \times 5 = 40 \text{ дм}^2$ .

Требуется вырезать по его углам такие квадраты, чтобы после загибания оставшихся кромок получилась коробка наибольшей вместимости.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работы мною была изучена литература о производной и интеграле, в том числе и литература для экономических специальностей по математическому анализу, что позволило выделить ряд определений, свойств и формул, которые являются важными для данной темы, а в дальнейшем и для моего обучения по выбранной специальности. Мною был разработан комплект задач по данной теме, выделены идеи решения каждого типа задач, что позволило достичь цели курсовой работы. В комплекте имеются задачи с решениями, а также задачи для самостоятельной работы, что позволит другим обучающимся использовать этот комплект.

В дальнейшем планирую более подробное изучение экономического смысла производной и интеграла, а также пополнение комплекта задач по данной теме.

## **ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 2**

Во второй главе был проведен анализ особенностей познавательной сферы обучающихся 10-11 классов с целью выделения тех характеристик, которые необходимо учитывать в процессе организации их учебной деятельности.

На основе выделенных характеристик, а также с учетом результатов, полученных в ходе теоретического исследования, были разработаны методические рекомендации к организации проектной деятельности обучающихся 10-11 классов. А также представлены примеры электронных образовательных ресурсов, которые можно использовать в ходе работы над проектом.

Для иллюстрации теоретических положений был разработан учебный проект по теме «Применение производной и интеграла в экономике».

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Цель данного исследования заключалась в разработке учебного проекта обучающихся 10-11 классов. Для достижения поставленной цели в ходе исследования был решен ряд задач.

Для решения первой и второй задач были проанализированы работы таких авторов как Дьюи Дж., Мяташ Н.В., Полат Е.С., Поташник М.М., Селевко Г.К., Чанова М.В., Чечель И.Д. с целью описания различных подходов к определению понятия «проектная деятельность» и характеристики её компонентов.

В ходе решения третьей задачи были изучены работы таких авторов, как Пахомова Н.Ю., Полат Е.С., Селевко Г.К. для выделения видов проектов и этапов организации проектной деятельности. Было установлено сходство выделенных этапов и проведено их обобщение.

В ходе решения четвертой задачи был проведен анализ особенностей познавательной сферы обучающихся 10-11 классов с целью выделения тех характеристик, которые необходимо учитывать в процессе организации их учебной деятельности. На основе выделенных особенностей, а также с учетом результатов, полученных в ходе теоретического исследования, для решения пятой задачи были проанализированы работы, посвященные использованию ЭОР в процессе обучения и составлен примерный перечень ресурсов, которые можно использовать в процессе организации проектной деятельности.

Для иллюстрации теоретических положений был разработан учебный проект с методическими комментариями по теме «Применение производной и интеграла в экономике».

На основании результатов, полученных в ходе исследования, можно сделать вывод, что для успешной организации проектной деятельности современных обучающихся педагогу необходимо использовать различные ресурсы, тем самым повышая интерес и мотивацию авторов проекта.

Таким образом, все задачи были решены и цель выпускной квалификационной работы достигнута.